Versión del estudiante

Eureka Math

Álgebra I

Módulo 3

Se les extiende un agradecimiento especial al Centro Gordon A. Cain y al Departamento de Matemáticas de la Universidad Estatal de Luisiana por su colaboración en el desarrollo de *Eureka Math*.

Para obtener un paquete gratis de recursos de *Eureka Math* para maestros, los Consejos para padres y otros recursos, por favor, visite www.Eureka.tools.

Great Minds PBC es el creador de *Eureka Math®*,

Wit & Wisdom®, *Alexandria Plan™* y *PhD Science™*.

Publicado por Great Minds PBC. greatminds.org

ISBN 978-1-68386-234-5

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Impreso en los EE. UU.

Lección 1: Secuencias de números enteros—¿Deberías confiar en los patrones?

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

La maestra Rosenblatt les dio a sus estudiantes una tarea que le parecía muy simple:

¿Cuál es el siguiente número en la secuencia $2, 4, 6, 8, \ldots$?

Cody: Pienso en un patrón "más 2*", así que el patrón continúa con* $10, 12, 14, 16, \ldots$

Ali: Pienso en un patrón de repetición, así que el patrón continúa con $2, 4, 6, 8, 2, 4, 6, 8, \ldots$

Suri: Pienso en los dígitos de unidades en los múltiplos de dos, así que el patrón continúa con $2, 4, 6, 8, 0, 2, 4, 6, 8, \ldots$

a. ¿Son estas respuestas válidas?

b. ¿Cuál es el $100.^{\circ}$ número en la secuencia que plantea Cody? ¿Y en la de Ali? ¿Y en la de Suri?

c. ¿Cuál es una de las expresiones en términos de n para el enésimo número de la secuencia que plantea Cody?

Ejemplo 1

Jerry pensó en un patrón que muestra las potencias de dos. Estos son los primeros seis números de la secuencia de Jerry:

$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$

Escribe una expresión para el enésimo número de la secuencia de Jerry.

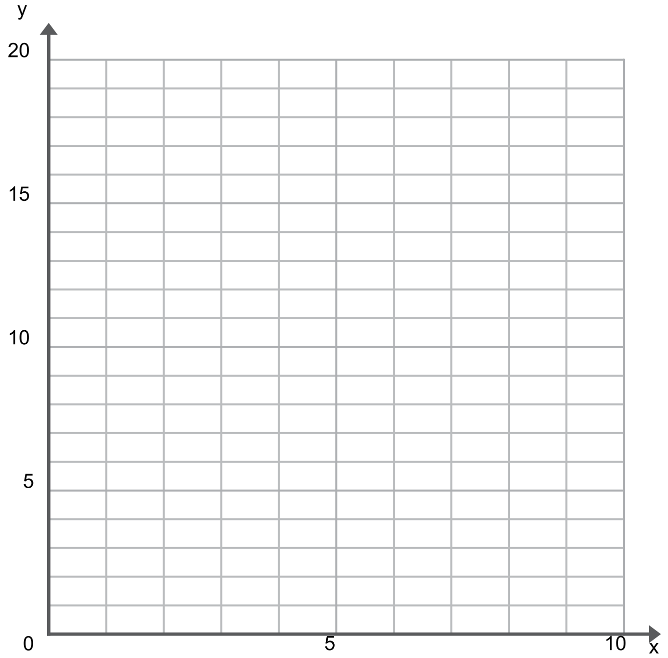
Ejemplo 2

Considera la siguiente secuencia como un patrón “más 3”: $4, 7, 10, 13, 16, \ldots$

a. Escribe una fórmula para la secuencia en la que utilices la notación a_n y la notación $f(n)$.

b. La fórmula $f(n) = 3(n-1) + 4$, ¿genera la misma secuencia? ¿Por qué algunas personas preferirían utilizar esta fórmula?

c. Representa gráficamente los términos de la secuencia como pares ordenados $(n, f(n))$ en el plano de coordenadas. ¿Qué observas acerca de la gráfica?



Ejercicios

1. Vuelve a considerar la secuencia del Ejercicio inicial. Cuando le preguntaron a la maestra Rosenblatt cuál era el siguiente número en la secuencia $2, 4, 6, 8, \ldots$, dijo: "17". La clase respondió: "¿17?".

   Sí, esa es la respuesta si utilizamos esta fórmula: $f(n) = \frac{7}{24}(n-1)^4 - \frac{7}{4}(n-1)^3 + \frac{77}{24}(n-1)^2 + \frac{1}{4}(n-1) + 2.$

   a. ¿La fórmula de la maestra produce realmente los números 2, 4, 6 y 8?

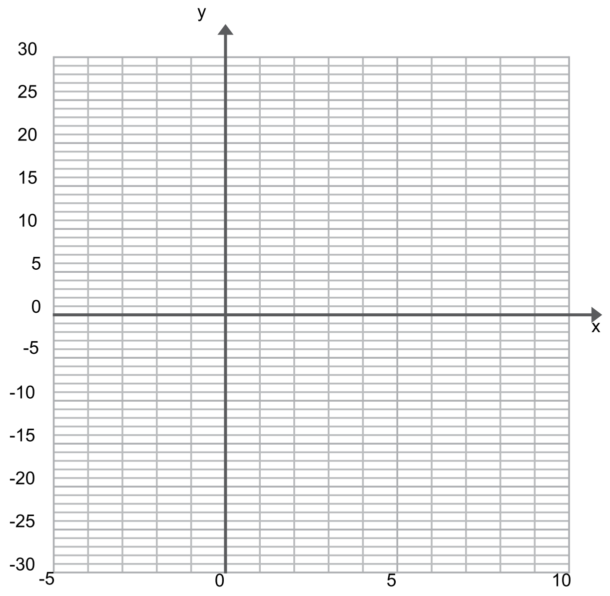
   b. ¿Cuál es el $100.°$ término en la secuencia de la maestra Rosenblatt?

2. Considera la siguiente secuencia como un patrón "menos 5": $30, 25, 20, 15, \ldots$

   a. Escribe la fórmula para el enésimo término de la secuencia. Asegúrate de especificar con qué valor de n empieza tu fórmula.

   b. Utiliza la fórmula para hallar el $20.°$ término de la secuencia.

   c. Representa gráficamente los términos de la secuencia como pares ordenados $(n, f(n))$ en un plano de coordenadas.

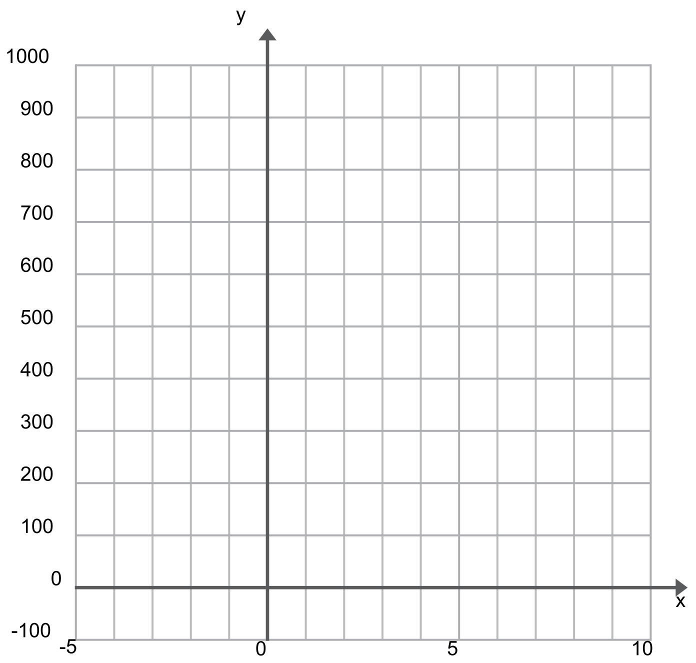


3. Considera la siguiente secuencia como un patrón "por 5": $1, 5, 25, 125, \ldots$

   a. Escribe la fórmula para el enésimo término de la secuencia. Asegúrate de especificar con qué valor de n empieza tu fórmula.

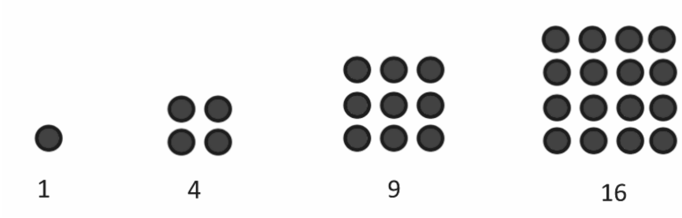
   b. Utiliza la fórmula para hallar el $10.°$ término de la secuencia.

   c. Representa gráficamente los términos de la secuencia como pares ordenados $(n, f(n))$ en un plano de coordenadas.



EUREKA MATH

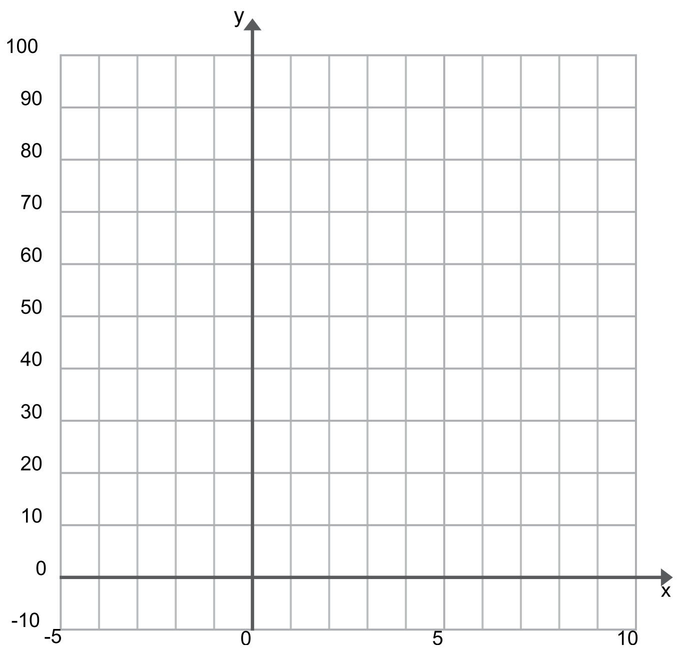
4. Considera la secuencia que forman estos números cuadrados:



a. Escribe la fórmula para el enésimo término de la secuencia. Asegúrate de especificar con qué valor de n empieza tu fórmula.

b. Utiliza la fórmula para hallar el $50.^{\circ}$ término de la secuencia.

c. Representa gráficamente los términos de la secuencia como pares ordenados $(n, f(n))$ en un plano de coordenadas.



5. Una hoja de papel de tamaño carta estándar tiene una longitud y un ancho de 8.5 pulgadas por 11 pulgadas.

a. Halla el área de una hoja de papel.

b. Si dobláramos el papel por la mitad, ¿cuál sería el área del rectángulo resultante?

c. Escribe una fórmula para una secuencia que permita determinar el área del papel luego de n dobleces.

d. ¿Cuál sería el área luego de 7 dobleces?

Resumen de la lección

Piensa en una secuencia como una lista de elementos ordenada. Proporciona una fórmula explícita para definir el patrón de la secuencia. A menos que se especifique otra cosa, sustituye n por 1 en la fórmula para hallar el primer término.

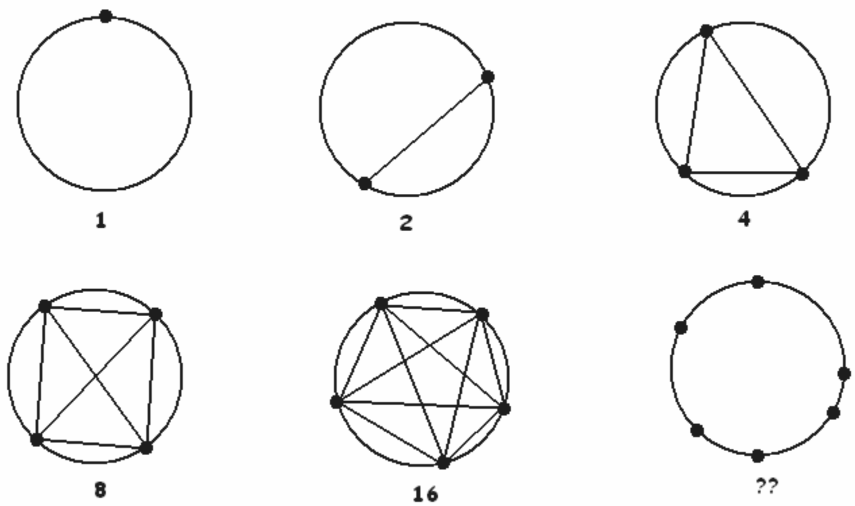
Grupo de problemas

1. Considera una secuencia generada por la fórmula $f(n) = 6n - 4$, cuyo primer valor es $n = 1$. Genera los términos $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ y $f(5)$.

2. Considera una secuencia dada por la fórmula $f(n) = \frac{1}{3^{n-1}}$, cuyo primer valor es $n = 1$. Genera los primeros 5 términos de la secuencia.

3. Considera una secuencia dada $f(n) = (-1)^n \times 3$, cuyo primer valor es $n = 1$. Genera los primeros 5 términos de la secuencia.

4. Este es el clásico rompecabezas que muestra que los patrones no siempre son válidos. ¿Qué cuentan los números?



   a. Básate en la secuencia de números para predecir el siguiente número.
   b. Escribe una fórmula que se base en el patrón percibido.
   c. Halla el siguiente número de la secuencia mediante el conteo.
   d. Según tu respuesta en la parte (c), ¿es efectivo tu modelo de la parte (b) para este rompecabezas?

Para cada una de las secuencias de los Problemas 5 a 8:

a. Escribe la fórmula para el enésimo término de la secuencia. Asegúrate de especificar con qué valor de n empieza tu fórmula.

b. Utiliza la fórmula para hallar el $15.°$ término de la secuencia.

c. Representa gráficamente los términos de la secuencia como pares ordenados $(n, f(n))$ en un plano de coordenadas.

5. Esta secuencia sigue un patrón “más 2”: $3, 5, 7, 9, \ldots$

6. Esta secuencia sigue un patrón “por 4”: $1, 4, 16, 64, \ldots$

7. Esta secuencia sigue un patrón “por -1”: $6, -6, 6, -6, \ldots$

8. Esta secuencia sigue un patrón “menos 3”: $12, 9, 6, 3, \ldots$

Lección 2: Fórmulas recursivas para secuencias

Trabajo en clase

Ejemplo 1

Considera la secuencia de Akelia: $5, 8, 11, 14, 17, \ldots$

a. Si confiaras en los patrones, ¿cuál dirías que es el siguiente número en la secuencia?

b. Escribe una fórmula para la secuencia de Akelia.

c. Explica cómo se relaciona cada parte de la fórmula con la secuencia.

d. Explica la fórmula de Johnny.

Ejercicios 1 y 2

1. Con tono divertido, Akelia le preguntó a Johnny: "¿Qué ocurriría si cambiáramos el signo de '$+$' de tu fórmula por un signo de '$-$'? ¿Y si lo cambiáramos por un signo de '$\times$'? ¿Y si lo cambiáramos por un signo de '$\div$'?".

   a. ¿Qué secuencia genera $A(n+1) = A(n) - 3$ para $n \geq 1$ y $A(1) = 5$?

   b. ¿Qué secuencia genera $A(n+1) = A(n) \cdot 3$ para $n \geq 1$ y $A(1) = 5$?

   c. ¿Qué secuencia genera $A(n+1) = A(n) \div 3$ para $n \geq 1$ y $A(1) = 5$?

2. Ben inventó una fórmula recursiva y la utilizó para generar una secuencia. Utilizó $B(n)$ para representar el enésimo término de su secuencia recursiva.

a. ¿Qué significa $B(3)$?

b. ¿Qué significa $B(m)$?

c. Si $B(n+1) = 33$ y $B(n) = 28$, escribe una posible fórmula recursiva que incluya $B(n+1)$ y $B(n)$ y que genere 28 y 33 en la secuencia.

d. ¿Qué significa $2B(7) + 6$?

e. ¿Qué significa $B(n) + B(m)$?

f. ¿Sería necesariamente igual a $B(n+m)$?

g. ¿Qué significa $B(17) - B(16)$?

Ejemplo 2

Considera una secuencia dada por la fórmula $a_n = a_{n-1} - 5$, donde $a_1 = 12$ y $n \geq 2$.

a. Enumera los primeros cinco términos de la secuencia.

b. Escribe una fórmula explícita.

c. Halla a_6 y a_{100} en la secuencia.

Ejercicios 3 a 6

3. Una de las secuencias más conocidas es la secuencia de Fibonacci:

   $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

   $f(n+1) = f(n) + f(n-1)$, donde $f(1) = 1$, $f(2) = 1$ y $n \geq 2$.

   ¿Cómo se genera cada término de la secuencia?

4. Cada una de las siguientes secuencias da una fórmula explícita. Escribe los primeros cinco términos de cada secuencia. Luego, escribe una fórmula recursiva para cada secuencia.

   a. $a_n = 2n + 10$ para $n \geq 1$

b. $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ para $n \geq 1$

5. Para cada secuencia, escribe una fórmula explícita o una fórmula recursiva.

   a. $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

   b. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

6. Lou abre una cuenta bancaria. El trato que hace con su madre es que, si al finalizar cada mes duplicó la cantidad de dinero que había en la cuenta al comenzar el mes, ella sumará $5 adicionales a la cuenta a fin de mes.

   a. Sea que $A(n)$ representa la cantidad de dinero que hay al comienzo del enésimo mes . Supón que, efectivamente, Lou duplica la cantidad de dinero cada mes. Escribe una fórmula recursiva para la cantidad de dinero que hay en su cuenta al comienzo del enésimo mes $(n + 1)$.

   b. ¿Cuál es la menor cantidad de dinero con la que puede comenzar para tener $\$300$ al comienzo del tercer mes?

Resumen de la lección

SECUENCIA RECURSIVA: un ejemplo de *secuencia recursiva* es una secuencia que (1) se define especificando los valores de uno o más términos iniciales y (2) tiene la propiedad de que los términos restantes satisfacen una fórmula recursiva que describe el valor de un término según una expresión en números, términos anteriores o el índice del término.

Una fórmula explícita especifica el enésimo término de una secuencia como una expresión en n.

Una fórmula recursiva especifica el enésimo término de una secuencia como una expresión en el término anterior (o en el par de términos anterior).

Grupo de problemas

Para los Problemas 1 a 4, enumera los primeros cinco términos de cada secuencia.

1. $a_{n+1} = a_n + 6$, donde $a_1 = 11$ para $n \geq 1$

2. $a_n = a_{n-1} \div 2$, donde $a_1 = 50$ para $n \geq 2$

3. $f(n+1) = -2f(n) + 8$ y $f(1) = 1$ para $n \geq 1$

4. $f(n) = f(n-1) + n$ y $f(1) = 4$ para $n \geq 2$

Para los Problemas 5 a 10, escribe una fórmula recursiva para cada secuencia que se da o se describe a continuación.

5. Sigue un patrón de “más uno”: $8, 9, 10, 11, 12, \ldots$

6. Sigue un patrón de “por 10”: $4, 40, 400, 4000, \ldots$

7. Tiene la fórmula explícita $f(n) = -3n + 2$ para $n \geq 1$.

8. Tiene la fórmula explícita $f(n) = -1(12)^{n-1}$ para $n \geq 1$.

9. Doug acepta un trabajo cuyo salario inicial es de $\$30,000$ por año, y cada año recibe un aumento de $\$3,000$.

10. Un cultivo de bacterias tiene una población inicial de 10 bacterias, y cada hora la población se triplica.

Esta página queda en blanco intencionalmente.

Lección 3: Secuencias aritméticas y geométricas

Trabajo en clase

Ejercicio 2

Piensa en un ejemplo del mundo real de una secuencia aritmética o geométrica. Descríbela y escribe su fórmula.

Ejercicio 3

Si doblamos una hoja de papel rectangular por la mitad múltiples veces y contamos el número de rectángulos que se crean, ¿qué tipo de secuencia estamos creando? ¿Puedes escribir la fórmula?

Resumen de la lección

Se estudiaron dos tipos de secuencias:

SECUENCIA ARITMÉTICA: una secuencia se denomina *aritmética* si existe un número real d tal que cada término de la secuencia es la suma del término previo más d.

SECUENCIA GEOMÉTRICA: una secuencia se denomina *geométrica* si existe un número real r tal que cada término de la secuencia es el producto del término previo más r.

Grupo de problemas

Para los Problemas 1 a 4, enumera los primeros cinco términos de cada secuencia e identifica si las secuencias son aritméticas o geométricas.

1. $A(n+1) = A(n) + 4$ para $n \geq 1$ y $A(1) = -2$

2. $A(n+1) = \frac{1}{4} \cdot A(n)$ para $n \geq 1$ y $A(1) = 8$

3. $A(n+1) = A(n) - 19$ para $n \geq 1$ y $A(1) = -6$

4. $A(n+1) = \frac{2}{3} A(n)$ para $n \geq 1$ y $A(1) = 6$

Para los Problemas 5 a 8, identifica si la secuencia es aritmética o geométrica y escribe una fórmula recursiva para ella. Asegúrate de identificar el valor inicial.

5. $14, 21, 28, 35, \dots$

6. $4, 40, 400, 4000, \dots$

7. $49, 7, 1, \frac{1}{7}, \frac{1}{49}, \dots$

8. $-101, -91, -81, -71, \dots$

9. El equipo de fútbol local ganó el campeonato hace varios años y, a partir de ese momento, el precio de las entradas aumentó $20 por año. El año que ganaron el campeonato, las entradas costaban $50. Escribe una fórmula recursiva para una secuencia que represente los precios de las entradas. ¿Esta secuencia, es aritmética o geométrica?

10. Un tercio de la cantidad de gramos de una sustancia radiactiva disminuye cada año. Si la cantidad inicial de esta sustancia en una roca es $1{,}452$ g, escribe una fórmula recursiva para una secuencia que represente la cantidad de sustancia que queda al final de cada año. ¿Esta secuencia es aritmética o geométrica?

11. Halla una fórmula explícita $f(n)$ para cada una de las siguientes secuencias aritméticas (supón que a es algún número real y x es algún número real).

    a. $-34, -22, -10, 2, \ldots$

    b. $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, 0, -\frac{1}{10}, \ldots$

    c. $x + 4, x + 8, x + 12, x + 16, \ldots$

    d. $a, 2a + 1, 3a + 2, 4a + 3, \ldots$

12. Considera la secuencia aritmética $13, 24, 35, \ldots$

    a. Halla una fórmula explícita para la secuencia en términos de n.

    b. Halla el $40.^{\text{o}}$ término de la secuencia.

    c. Si el enésimo término es 299, halla el valor de n.

13. Si $-2, a, b, c, 14$ forma una secuencia aritmética, halla los valores de a, b y c.

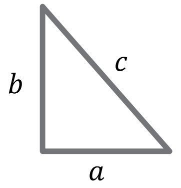
14. $3 + x, 9 + 3x, 13 + 4x, \ldots$ es una secuencia aritmética para algún número real x.

    a. Halla el valor de x.

    b. Halla el $10.^{\text{o}}$ término de la secuencia.

15. Halla una fórmula explícita $f(n)$ de la secuencia aritmética donde el $2.^{\text{o}}$ término sea 25 y la suma del $3.^{\text{o}}$ término y el $4.^{\text{o}}$ término sea 86.

16. Desafío: en la siguiente figura de un triángulo recto, las longitudes de los lados a cm, b cm y c cm del triángulo recto forman una secuencia aritmética finita. Si el perímetro del triángulo es 18 cm, halla los valores de a, b y c.



17. Halla la razón común y una fórmula explícita en cada una de las siguientes secuencias geométricas.

    a. $4, 12, 36, 108, \ldots$

    b. $162, 108, 72, 48, \ldots$

    c. $\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \ldots$

    d. $xz, x^2z^3, x^3z^5, x^4z^7, \ldots$

18. El primer término de una secuencia geométrica es 54 y el $5.^{\text{o}}$ término es $\frac{2}{3}$. Halla una fórmula explícita para la secuencia geométrica.

19. Si 2, a, b, -54 forma una secuencia geométrica, halla los valores de a y b.

20. Halla la fórmula explícita $f(n)$ de una secuencia geométrica si $f(3) - f(1) = 48$ y $\frac{f(3)}{f(1)} = 9$.

Lección 4: ¿Por qué los bancos te pagan A TI para brindarte sus servicios?

Trabajo en clase

Ejemplo 1

Kyra trabaja como niñera desde sexto grado. Ha ahorrado $\$1{,}000$ y quiere abrirse una cuenta en el banco para que sus ahorros generen intereses. El Banco Simple paga un interés simple a una tasa del 10%. ¿Cuánto dinero tendrá Kyra cuando transcurra 1 año? ¿Cuánto dinero tendrá luego de 2 años si no suma más dinero en la cuenta? ¿Y luego de 5 años?

Raoul necesita $\$200$ para instalar un puesto de helados este verano caluroso. Pide un préstamo en un banco que cobra un 4% de interés simple por año.

a. ¿Cuánto dinero deberá si tarda 1 año en pagar el préstamo? ¿Y si tarda 2 años? ¿Y si tarda 3 años? ¿Y si tarda 4 años? ¿Y si tarda 5 años?

b. Escribe una fórmula para el dinero que deberá si tarda t años.

Ejemplo 2

Jack tiene $\$500$ para invertir. El banco le ofrece una tasa de interés compuesto del 6% anual. ¿Cuánto dinero tendrá Jack cuando transcurra 1 año? ¿Y luego de 2 años? ¿Y si tarda 5 años? ¿Y luego de 10 años?

Ejemplo 3

Si tuvieras $\$200$ para invertirlos durante 10 años, ¿preferirías invertir el dinero en un banco que paga un interés simple del 7% o en un banco que paga un interés compuesto del 5% anual? ¿Podrías cambiar algo en el problema que hiciera que cambiara tu respuesta?

Resumen de la lección

INTERÉS SIMPLE: interés que se calcula una vez por año sobre la cantidad original prestada o invertida. El interés no se añade a la cantidad de dinero pedido o debido (el capital).

INTERÉS COMPUESTO: interés que se calcula una vez por periodo sobre la cantidad actual prestada o invertida. Cada periodo, el interés se añade al capital.

Grupo de problemas

1. Se invierten $\$250$ en un banco que paga un interés simple del 7%. Calcula la cantidad de dinero que habrá en la cuenta luego de 1 año, de 3 años, de 7 años y de 20 años.

2. Se pide un préstamo de $\$325$ en un banco que cobra un interés compuesto del 4% anual. ¿Cuál es la deuda luego de 1 año, de 3 años, de 7 años y de 20 años?

3. Joseph tiene $\$10{,}000$ para invertir. Puede ir al Banco Yankee, que paga un interés simple del 5%, o al Banco Met, que paga un interés compuesto del 4% anual. ¿Cuántos años tendría que invertir el dinero para que el Banco Met sea la mejor opción?

Esta página queda en blanco intencionalmente.

Lección 5: El poder del crecimiento exponencial

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

Dos empresas de alquiler de equipamiento tienen diferentes políticas de sanciones en cuanto al retraso en la devolución de los equipos.

Empresa 1: 1 día, sanción de $\$5$. 2 días, sanción de $\$10$. 3 días, sanción de $\$15$. 4 días, sanción de $\$20$, y así sucesivamente, con un incremento de $\$5$ por cada día de retraso en la devolución de los equipos.

Empresa 2: 1 día, sanción de $\$0.01$. 2 días, sanción de $\$0.02$. 3 días, sanción de $\$0.04$. 4 días, sanción de $\$0.08$, y así sucesivamente, con una duplicación del recargo por cada día de retraso adicional.

Jim alquiló una excavadora de la Empresa 2 porque pensó que tenía una mejor política de devolución con retraso. El trabajo que realizó con la excavadora le llevó más tiempo del que había calculado, pero no se preocupó, porque la sanción le parecía muy razonable. Cuando devolvió la excavadora, 15 días más tarde, se sorprendió muchísimo con la tarifa de recargo. ¿Cuánto pagó y cuánto habría pagado si hubiera alquilado el equipamiento de la Empresa 1?

Empresa 1	
Día	**Sanción**
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	

Empresa 2	
Día	**Sanción**
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	

a. ¿Qué empresa tiene una mayor tarifa de recargo por 15 días de retraso?

b. Describe cómo cambia la tarifa de recargo por retraso de un día cualquiera con respecto al día siguiente, tanto la de la Empresa 1 como la de la Empresa 2.

c. ¿Cuánto hubiera sido el recargo por retraso luego de 20 días en la Empresa 2?

Ejemplo 1

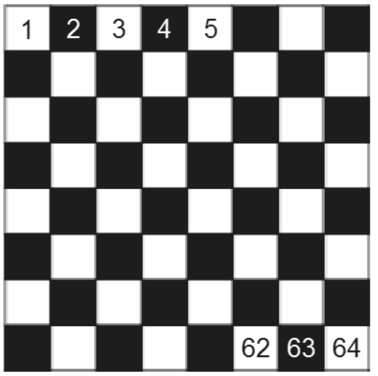
La historia cuenta que cuando el creador del ajedrez le mostró su invento al gobernante del país, el gobernante quedó muy impresionado. Tan impresionado estaba que le dijo al inventor que pidiera la recompensa que quisiera. El inventor, que era muy inteligente, dijo que aceptaría un grano de arroz en el primer cuadrado del tablero de ajedrez, dos granos de arroz en el segundo cuadrado del tablero, cuatro granos en el tercer cuadrado, ocho granos en el cuarto cuadrado, y así sucesivamente, con una duplicación del número de granos de arroz para cada cuadrado consecutivo. El gobernante se sorprendió, e incluso se ofendió un poco, al oír una recompensa tan modesta, pero le ordenó a su tesorero que contara los granos de arroz que tenían.

a. ¿Por qué se sorprendió el gobernante? ¿Qué le hace pensar que el inventor pidió una recompensa modesta?

El tesorero tardó más de una semana en contar el arroz que tenía almacenado el gobernante y, finalmente, le notificó que la recompensa requeriría más arroz del que había disponible en todo el reino. Según cuenta la leyenda, poco tiempo después, el inventor se convirtió en el nuevo rey.

b. Imagina al tesorero contando el arroz necesario para cada uno de los 64 cuadrados. Sabemos que al primer cuadrado se le asigna un solo grano de arroz y que cada cuadrado subsiguiente duplica el número de granos de arroz que había en el cuadrado anterior. La siguiente tabla presenta las primeras cinco cantidades de granos de arroz que se asignaron a los cuadrados del tablero. ¿Cómo podemos representar los granos de arroz como expresiones exponenciales?

Número de cuadrado	Granos de arroz	Expresión exponencial
1	1	
2	2	
3	4	
4	8	
5	16	



c. Escribe la expresión exponencial que describe cuánto arroz se asigna a cada uno de los últimos tres cuadrados del tablero.

Número de cuadrado	Expresión exponencial
62	
63	
64	

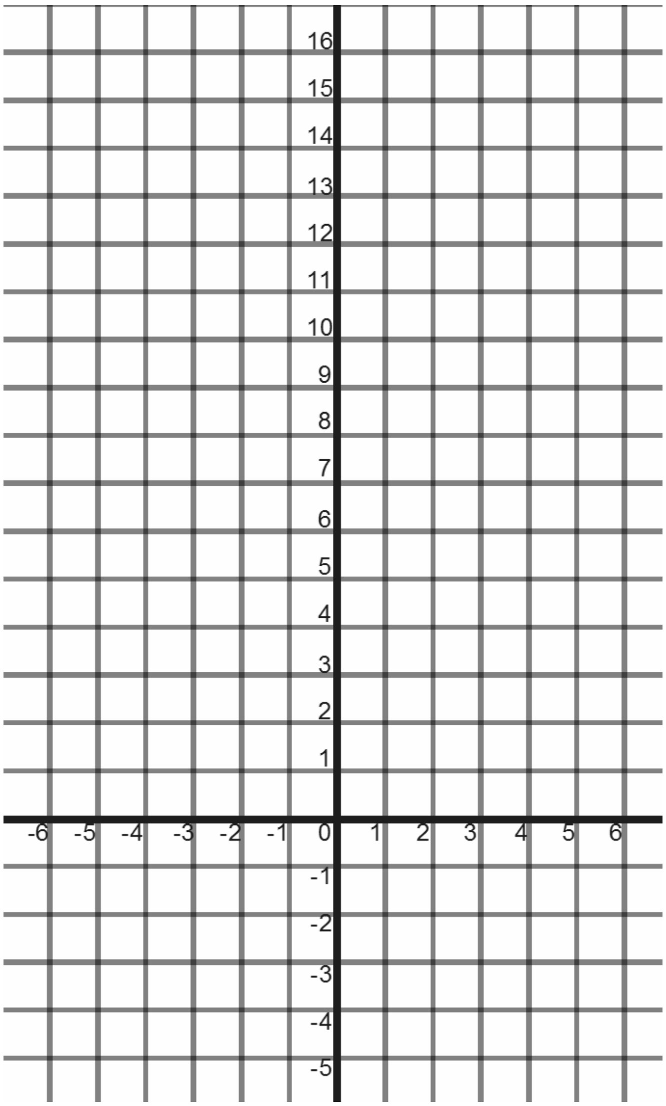
Ejemplo 2

Comprendamos la diferencia entre $f(n) = 2n$ y $f(n) = 2^n$.

a. Completa las siguientes tablas y, luego, representa gráficamente los puntos $(n, f(n))$ en un plano de coordenadas para cada una de las fórmulas.

n	$f(n) = 2n$
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

n	$f(n) = 2^n$
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



b. Describe el cambio en cada secuencia cuando n aumenta en 1 unidad para cada secuencia.

Ejercicio 1

El grosor común del papel higiénico es 0.001 pulgadas. Parece bastante fino, ¿verdad? Veamos qué ocurre cuando empezamos a doblar el papel higiénico.

a. ¿Qué tan gruesa es la pila de papel higiénico luego de 1 doblez? ¿Y luego de 2 dobleces? ¿Y luego de 5 dobleces?

b. Escribe una fórmula explícita para la secuencia que represente el grosor del papel higiénico doblado luego de n dobleces.

c. ¿Luego de cuántos dobleces la pila de papel higiénico doblado sobrepasa la marca de 1 pie de grosor?

d. La Luna se encuentra a aproximadamente $240{,}000$ millas de la Tierra. Compara el grosor del papel higiénico doblado 50 veces con la distancia entre la Luna y la Tierra.

Mira el siguiente video: *How folding paper can get you to the moon* (Cómo doblar papel puede ayudarte a llegar a la luna). (http://www.youtube.com/watch?v=AmFMJC45f1Q).

Ejercicio 2

Una moneda poco común se aprecia a una tasa de 5.2% por año. Si el valor inicial de la moneda es $\$500$, ¿luego de cuántos años su valor sobrepasará la marca de los $\$3{,}000$? Muestra la fórmula que representa el valor de la moneda luego de t años.

Grupo de problemas

1. Se coloca un balde debajo de un techo que filtra agua. La cantidad de agua que hay en el balde se duplica cada minuto. Luego de 8 minutos, el balde está lleno. ¿Cuántos minutos tienen que pasar para que el balde esté lleno hasta la mitad?

2. Se vendió una casa de tres habitaciones en Burbville a $\$190{,}000$. Si se espera que los precios de las viviendas de esa ciudad aumenten un 1.8% por año, escribe una fórmula explícita que represente el precio de la casa dentro de t años. Halla el precio que tendrá la casa dentro de 5 años.

3. En una universidad local, el número de graduados aumentó por un factor de 1.045 sobre el año anterior todos los años desde 1999. En 1999, se graduaron 924 estudiantes. ¿Qué fórmula explícita representa esta situación? ¿Aproximadamente cuántos estudiantes se graduaron en 2014?

4. La tasa de crecimiento de la población de la ciudad de Nueva York ha fluctuado enormemente en los últimos 200 años. Se estima que la tasa más alta fue de 126.8% en el año 1900. En 2001, la población de la ciudad era $8{,}008{,}288$, un 2.1% más que en el año 2000. Si suponemos que la tasa anual de crecimiento de la población se mantuvo en 2.1% desde el año 2000, ¿en qué año se calcula que la población de la ciudad de Nueva York sobrepasará los diez millones de habitantes? Asegúrate de incluir la fórmula explícita que utilizaste para obtener la respuesta.

5. En 2013, una empresa de investigación halló que el envío de teléfonos inteligentes (unidades vendidas) había aumentado un 32.7% en todo el mundo con respecto a 2012 y que se esperaba que la tendencia continuara. Si en 2013 se vendieron 959 millones de unidades, ¿cuántos teléfonos se calcula que se vendieron en 2018 con la misma tasa de crecimiento? (Incluye la fórmula explícita para la secuencia que representa este crecimiento). ¿Puede continuar esta tendencia?

6. Dos integrantes de una banda musical tienen solo 7 días para hacer correr la voz sobre su próxima actuación. Jack piensa que cada uno de ellos puede entregar 100 volantes por día durante los 7 días y que, así, van a anunciar el concierto de manera exitosa. Meg tiene otra estrategia. Quiere contarles a 10 amigos sobre el concierto el primer día y pedirle a cada uno de esos 10 amigos que le cuente a otro amigo el segundo día. Luego, todas las personas que se hayan enterado del concierto deben contarle a un amigo el tercer día, y así sucesivamente durante 7 días. Supón que los estudiantes no le cuentan a alguien que ya recibió la noticia.
   a. Durante los primeros 7 días, con la estrategia de Meg se informará a menos personas que con la estrategia de Jack. Demuestra que esto es verdadero.
   b. Si tuvieran más de 7 días, ¿habría un día en el que la estrategia de Meg serviría para haber informado a más personas que la estrategia de Jack? De no ser así, explica por qué no. De ser así, ¿qué día ocurriría esto?
   c. Si Meg sabe que solo tiene 7 días, ¿cómo puede cambiar su estrategia para informar a más personas que Jack?

7. El 1.º de junio, se introdujo accidentalmente una especie de alga de rápido crecimiento en un lago de un parque de la ciudad. El alga empieza a crecer y cubre la superficie del lago de forma tal que el área que cubre se duplica cada día. Si el alga sigue creciendo sin control, cubrirá todo el lago y los peces se asfixiarán. Con esta tasa de crecimiento, esto ocurrirá el 30 de junio.

   a. ¿Qué día estará cubierta la mitad del lago?

   b. El 26 de junio, un peatón que bordea el lago todos los días advierte que el lago estará completamente cubierto muy pronto. Su amiga se ríe. ¿Por qué la amiga no se toma en serio la advertencia?

   c. El 29 de junio, llega un equipo de limpieza al lago y quita casi todas las algas. Cuando el equipo termina su trabajo, solo el 1% de la superficie está cubierta por algas. ¿Qué tan efectiva es esta solución para el problema de las algas en este lago?

   d. Escribe una fórmula explícita para la secuencia que represente el porcentaje del área de la superficie del lago que está cubierta por algas, a, dado el tiempo en días, t, que ha transcurrido desde que se introdujo el alga en el lago.

8. La maestra Davis está preparando un póster con fórmulas matemáticas para sus estudiantes. Coloca la hoja de $8.5\text{ in} \times 11\text{ in}$ en la que imprimió las fórmulas en la fotocopiadora y amplía la imagen para que la longitud y el ancho sean el 150% del original. Amplía la imagen 3 veces y queda satisfecha con el tamaño del póster. Escribe una fórmula explícita para la secuencia que represente el área del póster, A, luego de n ampliaciones. ¿Cuál es el área de la imagen final en comparación con el área del original, expresada como porcentaje de incremento redondeado al porcentaje más cercano?

Esta página queda en blanco intencionalmente.

Lección 6: Crecimiento exponencial—Población estadounidense y población mundial

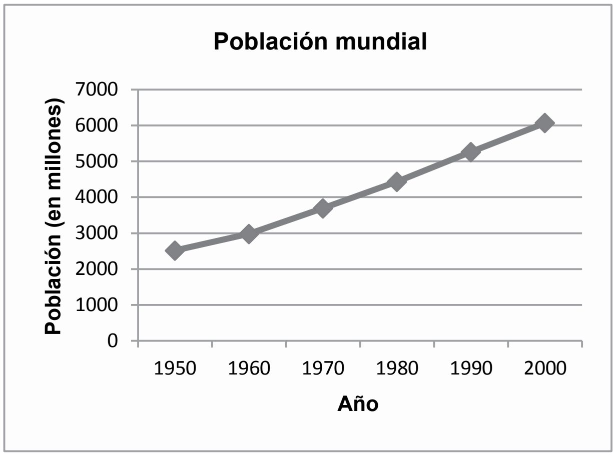
Trabajo en clase

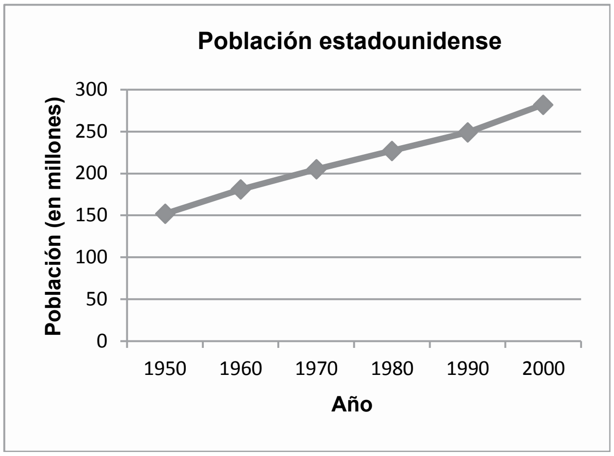
Ejercicio de representación matemática 1

Callie y Joe están examinando los datos poblacionales de la siguiente gráfica para un informe de historia. Estos son sus comentarios:

Callie: Parece que la población estadounidense creció la misma cantidad que la población mundial, pero eso no puede ser correcto, ¿verdad?

Joe: Bueno, no creo que hayan crecido en igual cantidad, pero es evidente que crecieron a aproximadamente el mismo ritmo. Mira las pendientes.





a. ¿La observación de Callie es correcta? ¿Por qué sí o por qué no?

b. ¿La observación de Joe es correcta? ¿Por qué sí o por qué no?

c. Utiliza la Gráfica de la población mundial para calcular aproximadamente el aumento porcentual de la población mundial desde 1950 hasta 2000.

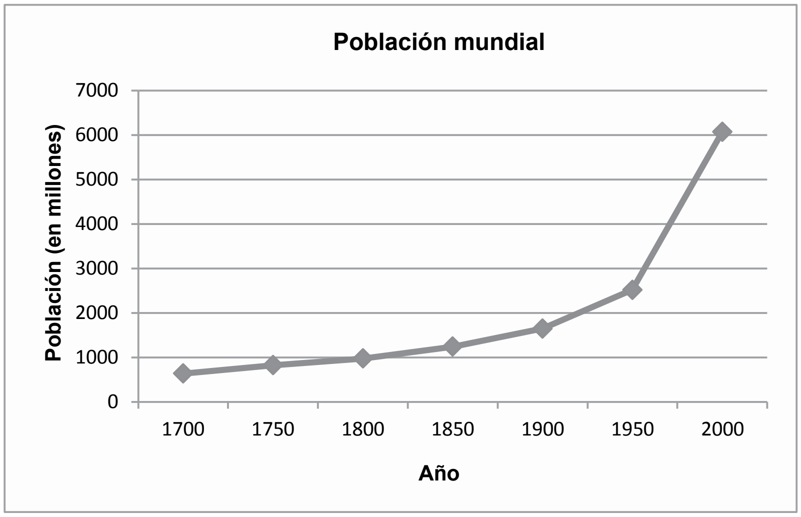
d. Ahora, utiliza la Gráfica de la población estadounidense para calcular aproximadamente el aumento porcentual de dicha población por el mismo periodo de tiempo.

e. ¿Cómo se compara el aumento porcentual de la población mundial con el de la población estadounidense durante el mismo periodo de tiempo (de 1950 al 2000)?

f. ¿Las gráficas de arriba parecen indicar un crecimiento poblacional lineal o exponencial? Explica tu respuesta.

g. Escribe una fórmula explícita para la secuencia que representa el crecimiento de la población mundial desde 1950 hasta 2000, en función de la información de la gráfica. Supón que la población (en millones) en 1950 era de $2{,}500$ y en 2000 era de $6{,}000$. Utiliza el símbolo t para representar el número de años a partir de 1950.

Ejercicio de representación matemática 2



a. ¿En qué se parece esta gráfica a la Gráfica de la población mundial que aparece en el Ejercicio de representación matemática 1? ¿En qué se diferencia?

b. ¿Coincide el comportamiento de la gráfica desde 1950 al 2000 con el que se muestra en la gráfica del Ejercicio de representación matemática 1?

c. ¿Por qué la gráfica del Ejercicio de representación matemática 1 es algo engañosa?

d. La siguiente fórmula exponencial puede utilizarse para representar el crecimiento de la población mundial desde 1950 hasta 2000:

$$f(t) = 2519(1.0177^t)$$

donde $2{,}519$ representa la población mundial en el año 1950, y t representa el número de años a partir de 1950. Utiliza esta ecuación para calcular la población mundial en 1950, 1980 y 2000. ¿Cómo se comparan tus cálculos con los datos de la población mundial que se muestran en la gráfica?

e. La tabla a continuación muestra los números de la población mundial que se utilizaron para crear las gráficas de arriba.

Año	**Población mundial (en millones)**
1700	640
1750	824
1800	978
1850	1,244
1900	1,650
1950	2,519
1960	2,982
1970	3,692
1980	4,435
1990	5,263
2000	6,070

¿Cómo se comparan los números de la tabla con los que calculaste en la parte (d) de arriba?

f. ¿En qué se diferencia la fórmula en la parte (d) de arriba de la fórmula en la parte (g) del Ejercicio de representación matemática 1? ¿Qué produce esta diferencia? ¿Qué fórmula representa mejor a la población?

Ejercicios 1 y 2

1. La siguiente tabla representa la población de los Estados Unidos (en millones) en los años que se detallan.

Año	**Población estadounidense (en millones)**
1800	5
1900	76
2000	282

a. Si utilizamos los datos del 1800 al 2000 para crear una ecuación exponencial que represente la población, generamos la siguiente fórmula para la secuencia, donde $f(t)$ representa la población estadounidense y t representa el número de años a partir del 1800.

$$f(t) = 5(1.0204)^t$$

Utiliza esta fórmula para determinar la población de los Estados Unidos en el año 2010.

b. Si utilizamos los datos del 1900 al 2000 para crear una ecuación exponencial que represente la población, generamos la siguiente fórmula para la secuencia, donde $f(t)$ representa la población estadounidense y t representa el número de años a partir del 1900.

$$f(t) = 76(1.013)^t$$

Utiliza esta fórmula para determinar la población de los Estados Unidos en el año 2010.

c. La población real de los Estados Unidos en el año 2010 era de 309 millones. ¿Cuál de las fórmulas de arriba representa mejor a la población estadounidense durante todo el periodo el 1800 al 2010? ¿Por qué?

d. Completa la siguiente tabla para mostrar las cifras poblacionales proyectadas para los años que se indican. Utiliza la fórmula de la parte (b) para determinar los números.

Año	**Población mundial (en millones)**
2020	
2050	
2080	

e. ¿Las cifras poblacionales que calculaste son razonables? ¿Qué otros factores deben considerarse cuando se proyecta una población?

2. La población del país de Oz era de $600{,}000$ en el año 2010. Se espera que la población crezca por un factor del 5% anual. Actualmente, el suministro anual de alimentos de Oz es suficiente para una población de $700{,}000$ personas y está aumentando a una tasa que proporcionará alimentos para $10{,}000$ personas adicionales por año.

   a. Escribe una fórmula que represente la población de Oz. ¿Es una fórmula lineal o exponencial?

b. Escribe una fórmula que represente el suministro de alimentos. ¿Es una fórmula lineal o exponencial?

c. ¿En qué punto la población superará al suministro de alimentos? Justifica tu respuesta.

d. Si Oz duplica el suministro actual de alimentos (a 1.4 millones), ¿seguirían produciéndose desabastecimientos? Explica tu respuesta.

e. Si Oz duplica el suministro inicial de alimentos y duplica la tasa a la que aumenta este suministro, ¿seguirían produciéndose desabastecimientos de alimentos? Explica tu respuesta.

Grupo de problemas

1. El Banco de Estudiantes paga una tasa de interés simple del 2.5% por año. El Banco del Vecindario paga una tasa de interés compuesto del 2.1% por año, compuesta mensualmente.

   a. ¿Qué banco te proporcionará el mayor saldo si planeas invertir $\$10,000$ por 10 años? ¿Y por 20 años?

   b. Escribe una fórmula explícita para la secuencia que representa el saldo de la cuenta bancaria del Banco de Estudiantes t años después de que se haya dejado un depósito en la cuenta.

   c. Escribe una fórmula explícita para la secuencia que representa el saldo de la cuenta bancaria del Banco del Vecindario m meses después de que se haya dejado un depósito en la cuenta.

   d. Crea una tabla de valores que indique los saldos de las dos cuentas bancarias desde el año 2 al año 20 con incrementos de 2 años. Redondea cada valor a la cantidad en dólares más cercana.

Año	**Banco de Estudiantes (en dólares)**	**Banco del Vecindario (en dólares)**
0		
2		
4		
6		
8		
10		
12		
14		
16		
18		
20		

   e. ¿Qué banco es mejor para realizar una inversión a corto plazo? ¿Qué banco es mejor para aquellos que depositan dinero por un periodo de tiempo más prolongado? ¿Cuándo son las inversiones aproximadamente iguales?

   f. ¿Qué tipo de modelo es el Banco de Estudiantes? ¿Cuál es la tasa o razón de cambio?

   g. ¿Qué tipo de modelo es el Banco del Vecindario? ¿Cuál es la tasa o razón de cambio?

2. La siguiente tabla representa la población del estado de Nueva York en el periodo del 1800 al 2000. Utiliza esta información para responder las preguntas.

Año	**Población**
1800	$300{,}000$
1900	$7{,}300{,}000$
2000	$19{,}000{,}000$

a. Si utilizamos el año 1800 como el año base, una fórmula explícita para la secuencia que representa la población de Nueva York es $P(t) = 300\ 000(1.021)^t$, donde t es el número de años a partir del 1800.

Con esta fórmula, calcula la población de Nueva York proyectada para el año 2010.

b. Si utilizamos el año 1900 como el año base, una fórmula explícita para la secuencia que representa a la población de Nueva York es $P(t) = 7\ 300\ 000(1.0096)^t$, donde t es el número de años a partir del 1900.

Con esta fórmula, calcula la población de Nueva York proyectada para el año 2010.

c. Utiliza Internet (o cualquier otra fuente) para hallar la población del estado de Nueva York según el censo de 2010. ¿Qué fórmula brindó una predicción más acertada de la población de 2010?

Esta página queda en blanco intencionalmente.

Lección 7: Decaimiento exponencial

Trabajo en clase

Ejemplo 1

a. Malik compró un carro nuevo por $\$15{,}000$. Mientras lo sacaba del lote, su mejor amigo, Will, le dijo que el valor del carro acababa de caer un 15% y que el valor actual continuaría depreciándose 15% cada año. Si el valor actual del carro es de $\$12{,}750$ (según Will), ¿cuál será su valor después de 5 años?

Completa la siguiente tabla para determinar el valor del carro luego de cada uno de los próximos cinco años. Redondea cada valor a la cantidad en centavos más cercana.

Cantidad de años, t, que pasaron desde que el carro salió del lote	Valor del carro después de t años	Depreciación del 15% del valor actual del carro	Valor del carro menos la depreciación del 15%
0	$\$12{,}750.00$	$\$1{,}912.50$	$\$10{,}837.50$
1	$10{,}837.50$		
2			
3			
4			
5			

b. Escribe una fórmula explícita para la secuencia que representa el valor del carro de Malik t años después de sacarlo del lote.

c. Utiliza la fórmula de la parte (b) para determinar el valor del carro de Malik cinco años después de su compra. Redondea tu respuesta a la cantidad en centavos más cercana. Compara el valor con el valor que se muestra en la tabla. ¿Son iguales?

d. Utiliza la fórmula de la parte (b) para determinar el valor del carro de Malik 7 años después de su compra. Redondea tu respuesta a la cantidad en centavos más cercana.

Ejercicios 1 a 6

1. Identifica el valor inicial en cada fórmula a continuación y determina si la fórmula representa un crecimiento exponencial o un decaimiento exponencial. Justifica tus respuestas.

   a. $f(t) = 2\left(\frac{2}{5}\right)^t$

   b. $f(t) = 2\left(\frac{5}{3}\right)^t$

   c. $f(t) = \frac{2}{3}(3)^t$

   d. $f(t) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^t$

   e. $f(t) = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^t$

2. Si una persona ingiere una dosis dada d de un medicamento determinado, entonces la fórmula $f(t) = d\,(0.8)^t$ representa la concentración del medicamento en el torrente sanguíneo t horas después. Si Charlotte ingiere 200 mg del medicamento a las 6: 00 a. m., ¿qué cantidad queda en su torrente sanguíneo a las 10: 00 a. m.? ¿Cuánto tarda la concentración en descender por debajo de 1 mg?

3. Cuando respiras normalmente, con cada bocanada se reemplaza alrededor del 12% del aire en tus pulmones. Escribe una fórmula explícita para la secuencia que represente la cantidad de aire original que queda en tus pulmones, considerando que el volumen inicial de aire es de 500 mL. Utiliza tu modelo para determinar qué cantidad de los 500 mL originales permanece luego de 50 bocanadas.

4. Ryan compró una computadora nueva por $\$2{,}100$. El valor de la computadora disminuye un 50% cada año. ¿Cuándo descenderá el valor por debajo de $\$300$?

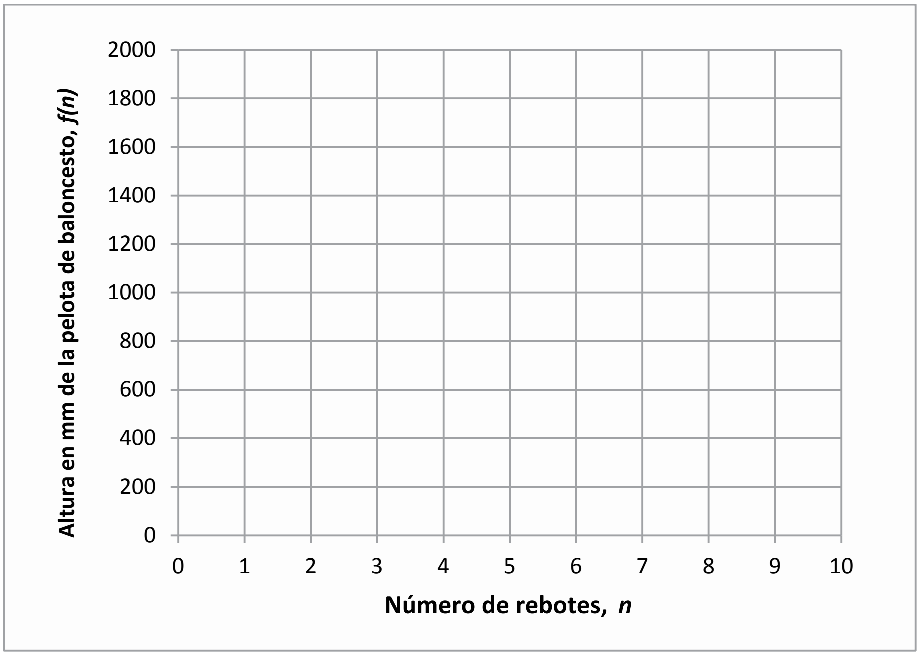
5. La mamá de Kelli ingiere una dosis de aspirina de 400 mg. La cantidad de aspirina en el sistema de una persona disminuye alrededor de un 29% cada hora. ¿Qué cantidad de aspirina queda en su sistema después de 6 horas?

6. De acuerdo a la Federación Internacional de Baloncesto (FIBA, por sus siglas en francés), una pelota de baloncesto debe inflarse a una presión de modo tal que cuando se la arroje desde una altura de $1{,}800 \text{ mm}$, esta rebotará a una altura de $1{,}300 \text{ mm}$. Maddie decide probar la capacidad de rebote de su nueva pelota de baloncesto. Supone que la razón de cada altura de rebote con respecto a la altura de rebote anterior permanece igual en $\frac{1300}{1800}$. Sea $f(n)$ la altura de la pelota de baloncesto después de n rebotes. Completa la tabla a continuación para mostrar las alturas que Maddie espera medir.

n	$f(n)$
0	$1{,}800$
1	
2	
3	
4	

a. Escribe una fórmula explícita para la secuencia que representa la altura de la pelota de baloncesto de Maddie después de cualquier número de rebotes.

b. Ubica los puntos de la tabla. Conecta los puntos con una curva suave y, luego, utiliza la curva para calcular aproximadamente en qué rebote la altura del rebote cae por debajo de 200 mm.



Resumen de la lección

La fórmula explícita $f(t) = ab^t$ representa el decaimiento exponencial, donde a representa el valor inicial de la secuencia, $b < 1$ representa el factor de crecimiento (o factor de decaimiento) por unidad de tiempo, y t representa las unidades de tiempo.

Grupo de problemas

1. Desde el año 2000 hasta el 2013, el valor del dólar estadounidense ha estado disminuyendo. El valor del dólar estadounidense a través del tiempo $(v(t))$ se puede representar con la siguiente fórmula:

   $v(t) = 1.36(0.9758)^t$, donde t es el número de años desde el 2000.

   a. ¿Cuál era el valor de un dólar en el año 2005?
   b. Representa en una gráfica los puntos $(t, v(t))$ para los valores enteros de $0 \leq t \leq 14$.
   c. Calcula aproximadamente el año en el cual el valor del dólar cayó por debajo de $\$1.00$.

2. Una compañía de construcción compró unos equipos con un costo de $\$300{,}000$. El valor de los equipos se depreció (disminuyó) a una tasa de 14% por año.

   a. Escribe una fórmula que represente el valor de los equipos cada año.
   b. ¿Cuál es el valor de los equipos después de 9 años?
   c. Representa en una gráfica los puntos $(t, v(t))$ para los valores enteros de $0 \leq t \leq 15$.
   d. Calcula aproximadamente cuándo los equipos tendrán un valor de $\$50{,}000$.

3. Los números de los nuevos casos reportados de VIH (en miles) en los Estados Unidos, desde el 2000 hasta el 2010, se pueden representar con la siguiente fórmula:

   $f(t) = 41(0.9842)^t$, donde t es el número de años después del 2000.

   a. Identifica el factor de crecimiento.
   b. Calcula el número aproximado de nuevos casos de VIH reportados en 2004.
   c. Representa en una gráfica los puntos $(t, f(t))$ para los valores enteros de $0 \leq t \leq 10$.
   d. ¿En qué año el número de nuevos casos de VIH reportados descendió por debajo de $36{,}000$?

4. Doug bebió un refresco con 130 mg de cafeína. La cafeína en el cuerpo se reduce en un 12%, aproximadamente, cada hora.

   a. Escribe una fórmula para representar la cantidad de cafeína que queda en el sistema de Doug cada hora.
   b. ¿Cuánta cafeína queda en el sistema de Doug después de 2 horas?
   c. ¿Cuánto tardará el nivel de cafeína en el sistema de Doug en descender por debajo de 50 mg?

5. 64 equipos participan en un torneo de sóftbol en el cual la mitad de los equipos quedan eliminados luego de cada ronda de juego.
   a. Escribe una fórmula para representar el número de equipos que quedan después de cualquiera de las rondas.
   b. ¿Cuántos equipos quedan después de 3 rondas?
   c. ¿Cuántas rondas llevará determinar qué equipo ganará el torneo?

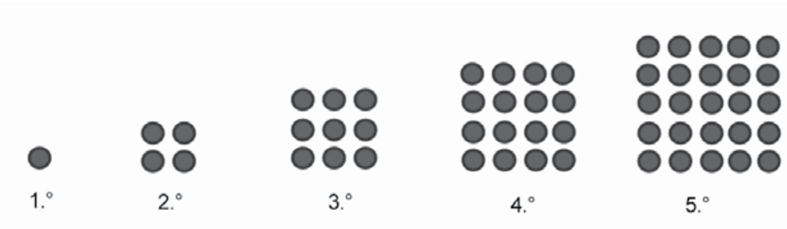
6. Sam compró un carro usado por $\$8,000$. Presumió haber hecho un gran negocio, dado que el valor del carro hace dos años (cuando era nuevo) era de $\$15,000$. Su amigo, Derek, fue escéptico y afirmó que el valor de un carro se deprecia, normalmente, alrededor del 25% por año, por lo que Sam hizo un mal negocio.
   a. Utiliza la lógica de Derek para escribir una fórmula para el valor del carro de Sam. Utiliza el símbolo t para la antigüedad total del carro en años.
   b. ¿Quién está en lo correcto, Sam o Derek?

Lección 8: ¿Por qué quedarse con los números enteros?

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

La secuencia de cuadrados perfectos $\{1,4,9,16,25, \dots\}$ recibe este nombre debido a que los antiguos griegos se dieron cuenta de que estas cantidades se podían ordenar de manera que formen un cuadrado.



Si $S(n)$ denota el enésimo número cuadrado, ¿cuál es la fórmula para $S(n)$?

Ejercicios

1. Demuestra si 169 es o no un cuadrado perfecto.

2. Demuestra si 200 es o no un cuadrado perfecto.

3. Si $S(n) = 225$, entonces ¿cuánto es n?

4. ¿Qué término es el número 400 en la secuencia de cuadrados perfectos? ¿Cómo lo sabes?

En lugar de ordenar los puntos en cuadrados, supón que extendemos nuestro razonamiento para considerar cuadrados de longitud lateral de x cm.

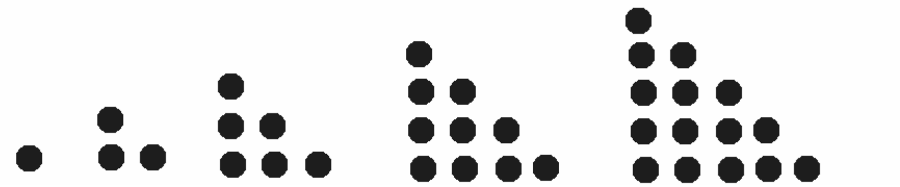
5. Crea una fórmula para el área $A(x)\ \mathrm{cm}^2$ de un cuadrado de longitud lateral de x cm: $A(x) =$ __________.

6. Utiliza la fórmula para determinar el área de cuadrados con longitudes laterales de $3\ \mathrm{cm}$, $10.5\ \mathrm{cm}$ y $\pi\ \mathrm{cm}$.

7. ¿Que significa $A(0)$?

8. ¿Qué significan $A(-10)$ y $A(\sqrt{2})$?

Los números triangulares son los números que surgen de ordenar puntos en figuras triangulares, como se muestra aquí:



9. ¿Cuál es el $100.°$ número triangular?

10. Halla una fórmula para $T(n)$, el enésimo número triangular (comienza con $n = 1$).

11. ¿Cómo puedes asegurarte de que tu fórmula funcione?

12. Crea una gráfica de la secuencia de números triangulares $(n) = \frac{n(n+1)}{2}$, donde n es un entero positivo.

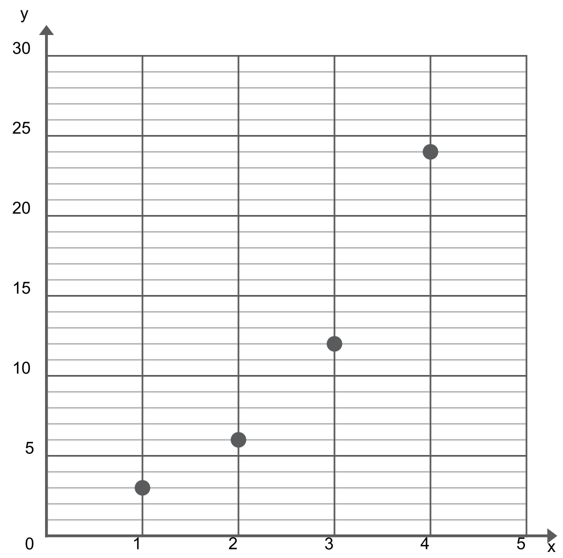
13. Crea una gráfica de la fórmula del área del triángulo $T(x) = \frac{x(x+1)}{2}$, donde x es cualquier número real positivo.

14. ¿En qué se parecen tus dos gráficas? ¿En qué se diferencian?

Grupo de problemas

1. Los primeros cuatro términos de dos secuencias diferentes se muestran a continuación: la secuencia A se muestra en la tabla, y la secuencia B se representa en una gráfica como un conjunto de pares ordenados.

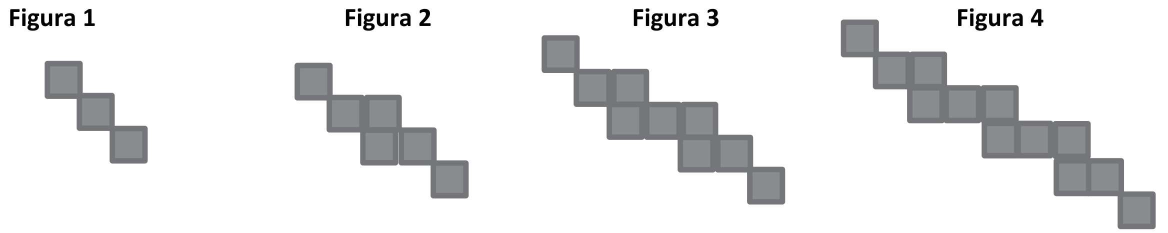
n	$A(n)$
1	15
2	31
3	47
4	63



   a. Crea una fórmula explícita para cada secuencia.

   b. ¿Qué secuencia será la primera en superar el 500? ¿Cómo lo sabes?

2. A continuación se muestra un patrón de losas.

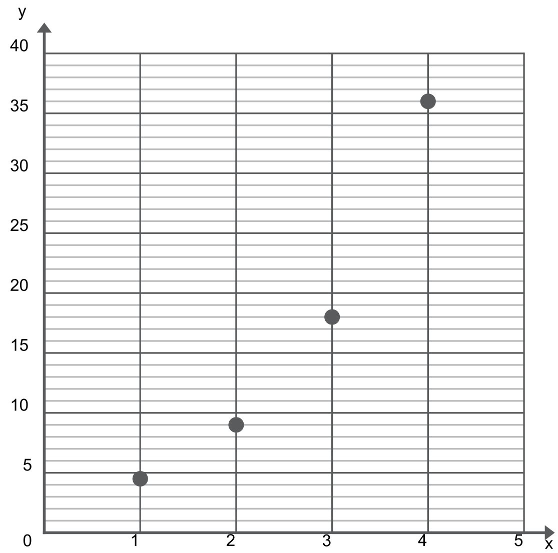


   a. ¿Cómo está creciendo este patrón?

   b. Crea una fórmula explícita que podría utilizarse para determinar el número de cuadrados en la enésima figura.

   c. Evalúa tu fórmula para $n = 0$, y $n = 2.5$. Dibuja la Figura 0 y la Figura 2.5, y explica cómo decidiste crear tus dibujos.

3. Los primeros cuatro términos de una secuencia geométrica se representan en una gráfica como un conjunto de pares ordenados.



a. ¿Cuál es una fórmula explícita para esta secuencia?

b. Explica el significado del par ordenado $(3, 18)$.

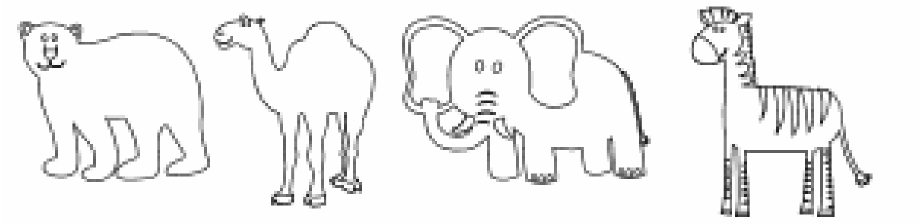
c. En julio de 2013, Justin Bieber tenía más de $42{,}000{,}000$ seguidores en Twitter. Supón que la secuencia representa el número de personas que siguen tu nueva cuenta de Twitter cada semana desde que la creaste. Si la cantidad de seguidores sigue creciendo de la misma manera, ¿cuándo superarás $1{,}000{,}000$ seguidores?

Lección 9: Representar, nombrar y evaluar funciones

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

Empareja cada imagen con la palabra correcta trazando una flecha desde la palabra hasta la imagen.



Elefante
Camello
Oso polar
Cebra

FUNCIÓN: una *función* es una correspondencia entre dos conjuntos, X y Y, en la que cada elemento de X se empareja con uno y solo uno de los elementos de Y. El conjunto X se denomina el *dominio de la función*.

La notación $f: X \to Y$ se utiliza para nombrar la función y describe tanto a X como a Y. Si x es un elemento en el dominio X de una función $f: X \to Y$, entonces x se empareja con un elemento de Y llamado $f(x)$. Decimos que $f(x)$ es el valor en Y que denota la *salida* o *imagen* de f que corresponde a la *entrada* x.

El *rango (o imagen)* de una función $f: X \to Y$ es el subconjunto de Y, que se denota $f(X)$, definido por la siguiente propiedad: y es un elemento de $f(X)$ si y solo si existe una x en X tal que $f(x) = y$.

Ejemplo 1

Define el Ejercicio inicial utilizando la notación de funciones. Indica el dominio y el rango.

Ejemplo 2

¿Es la asignación de estudiantes a maestros de inglés un ejemplo de una función? Si lo es, defínela utilizando la notación de funciones e indica el dominio y el rango.

Ejemplo 3

Sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y $Y = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. f y g se definen a continuación.

$f\colon\ X \to Y$

$f = \{(1,7), (2,5), (3,6), (4,7)\}$

$g\colon\ X \to Y$

$g = \{(1, 5), (2, 6), (1, 8), (2,9), (3,7)\}$

¿Es f una función? Si lo es, ¿cuál es el dominio y cuál es el rango? Si no lo es, explica por qué f no es una función.

¿Es g una función? Si lo es, ¿cuáles son el dominio y el rango? Si no lo es, explica por qué g no es una función.

¿Qué es $f(2)$?

Si $f(x) = 7$, entonces ¿qué podría ser x?

Ejercicios

1. Define f para asignar a cada estudiante de tu escuela un número de identificación único.

   f: $\{\text{estudiantes de tu escuela}\} \rightarrow \{\text{números enteros}\}$

   Asigna a cada estudiante un número de identificación único.

   a. ¿Es este un ejemplo de una función? Utiliza la definición para explicar por qué sí o por qué no.

   b. Supón que $f(\text{Hilda}) = 350123$. ¿Eso qué significa?

   c. Escribe tu nombre y tu número de identificación estudiantil utilizando la notación de funciones.

2. Sea g lo que asigne a cada estudiante de tu escuela un nivel de grado.

   a. ¿Es este un ejemplo de una función? Explica tu razonamiento.

   b. Expresa esta relación utilizando la notación de funciones e indica el dominio y el rango.

      g: $\{\text{estudiantes de la escuela}\} \rightarrow \{\text{nivel de grado}\}$

      Asigna a cada estudiante un nivel de grado.

3. Sea h la función que asigne a cada número de identificación estudiantil un nivel de grado.

   h: $\{\text{número de identificación estudiantil}\} \rightarrow \{\text{nivel de grado}\}$

   Asigna a cada número de identificación estudiantil el nivel de grado actual del estudiante.

   a. Describe el dominio y el rango de esta función.

   b. Registra varios pares ordenados $(x, f(x))$ que te representen a ti y a los estudiantes de tu grupo o clase.

   c. Jonny dice: "Esta no es una función porque a cada estudiante de noveno grado se le asigna el mismo valor de rango de 9. El rango solo tiene 4 números $\{9, 10, 11, 12\}$, pero el dominio tiene un número por cada estudiante de nuestra escuela". Explica a Jonny por qué lo que dice es incorrecto.

Grupo de problemas

1. ¿Cuáles de los siguientes ejemplos representan funciones? Justifica tus respuestas.
   a. La asignación de los miembros de un equipo de fútbol a los números de camisetas.
   b. La asignación de ciudadanos estadounidenses a números de seguridad social.
   c. La asignación de estudiantes a números de casilleros.
   d. La asignación de los residentes de una casa a las direcciones de las calles.
   e. La asignación de códigos postales a residencias.
   f. La asignación de residencias a códigos postales.
   g. La asignación de maestros a estudiantes inscritos en cada una de sus clases.
   h. La asignación de todos los números reales al siguiente entero igual a o mayor que ese número.
   i. La asignación de cada número racional al producto de su numerador y denominador.

2. Las secuencias son funciones. El dominio es el conjunto de todos los números de términos (que usualmente son los enteros positivos) y el rango es el conjunto de términos de la secuencia. Por ejemplo, la secuencia $1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$ de cuadrados perfectos es la función:

   Sea f: $\{\text{enteros positivos}\} \rightarrow \{\text{cuadrados perfectos}\}$

   Asigna cada número de término al cuadrado de ese número.

   a. ¿Qué es $f(3)$? ¿Esto qué significa?
   b. ¿Cuál es la solución de la ecuación $f(x) = 49$? ¿Qué significa esta solución?
   c. Según esta definición, ¿está -3 en el dominio de f? Explica por qué sí o por qué no.
   d. Según esta definición, ¿está 50 en el rango de f? Explica por qué sí o por qué no.

3. Escribe cada secuencia como una función.
   a. $\{1, 3, 6, 10, 15, 21, 28\}$
   b. $\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$
   c. $a_{n+1} = 3a_n$, $a_1 = 1$, donde n es un entero positivo mayor que o igual a 1.

Esta página queda en blanco intencionalmente.

Lección 10: Representar, nombrar y evaluar funciones

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

Estudia las siguientes 4 representaciones de una función. ¿En qué se parecen estas representaciones? ¿En qué se diferencian?

TABLA:

Entrada	0	1	2	3	4	5
Salida	1	2	4	8	16	32

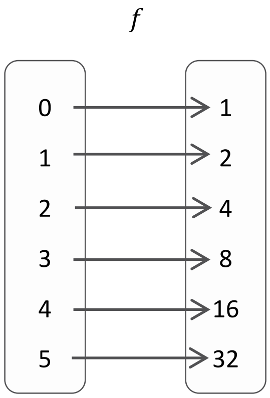
FUNCIÓN:

Sea f: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ tal que $x \mapsto 2^x$.

SECUENCIA:

Sea $a_{n+1} = 2a_n$, $a_0 = 1$ para $0 \leq n \leq 4$, donde n es un entero.

DIAGRAMA:



Ejercicio 1

Sea $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Completa la siguiente tabla utilizando la definición de f.

$f\colon\ X \to Y$

Asigna cada x en X a la expresión 2^x.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$						

¿Qué son $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ y $f(5)$?

¿Cuál es el rango de f?

Ejercicio 2

La función cuadrática se define de la siguiente manera:

Sea $f\colon\ X \to Y$ la función tal que $x \mapsto x^2$, donde X es el conjunto de todos los números reales.

¿Qué son $f(0)$, $f(3)$, $f(-2)$, $f\left(\sqrt{3}\right)$, $f(-2.5)$, $f\left(\frac{2}{3}\right)$, $f(a)$ y $f(3 + a)$?

¿Cuál es el rango de f?

¿Qué subconjunto de números reales se podría usar como el dominio de la función cuadrática para crear un rango con los mismos valores de salida que la secuencia de números cuadrados $\{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$ de la Lección 9?

Ejercicio 3

Recuerda que una ecuación puede ser verdadera o falsa. Utiliza la función definida por f: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ tal que $x \mapsto 2^x$, para determinar si la ecuación $f(x) = 2^x$ es verdadera o falsa para cada x en el dominio de f.

x	**¿Es la ecuación $f(x) = 2^x$ verdadera o falsa?**	**Justificación**
0	Verdadera	Sustituye la variable por 0 en la ecuación. $f(0) = 2^0$ $1 = 2^0$ El 1 en el lado izquierdo viene de la definición de f, y el valor de 2^0 también es 1, entonces la ecuación es verdadera.
1		
2		
3		
4		
5		

Si el dominio de f se extendiera a todos los números reales, ¿seguiría siendo verdadera la ecuación para cada x en el dominio de f? Explica tu razonamiento.

Ejercicio 4

Escribe tres funciones polinomiales diferentes tal que $f(3) = 2$.

Ejercicio 5

El dominio y el rango de esta función no están especificados. Evalúa la función para varios valores de x. ¿Qué subconjunto de los números reales representaría el dominio de esta función? ¿Qué subconjunto de los números reales representaría su rango?

Sea $f(x) = \sqrt{x-2}$

Resumen de la lección

FUNCIÓN ALGEBRAICA: dada una expresión algebraica de una variable, una *función algebraica* es una función $f : D \to Y$ tal que para cada número real x del dominio D, $f(x)$ es el valor hallado al sustituir x por el número en todas las instancias de la variable de la expresión algebraica y evaluarla.

La siguiente notación se utilizará para definir funciones a medida que avanzamos. Si un dominio no está especificado, se supone que es el conjunto de todos los números reales.

Para la función cuadrática, decimos Sea $f(x) = x^2$.

Para la función exponencial con base 2, decimos Sea $f(x) = 2^x$.

Cuando el dominio está limitado por la expresión o la situación a un subconjunto de los números reales, este se debe especificar cuando se define la función.

Para la función de raíz cuadrada, decimos Sea $f(x) = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$.

Para definir los primeros 5 números triangulares, decimos Sea $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{2}$ para $1 \leq x \leq 5$, donde x es un entero.

Según el contexto, se puede considerar el enunciado "$f(x) = \sqrt{x}$" como parte de la definición de la función f o como una ecuación que es verdadera para todas las x en el dominio de f o como una fórmula.

Grupo de problemas

1. Sea $f(x) = 6x - 3$, y sea $g(x) = 0.5(4)^x$. Halla el valor de cada función para la entrada dada.

   a. $f(0)$
   b. $f(-10)$
   c. $f(2)$
   d. $f(0.01)$
   e. $f(11.25)$
   f. $f\left(-\sqrt{2}\right)$
   g. $f\left(\frac{5}{3}\right)$
   h. $f(1) + f(2)$
   i. $f(6) - f(2)$
   j. $g(0)$
   k. $g(-1)$
   l. $g(2)$
   m. $g(-3)$
   n. $g(4)$
   o. $g\left(\sqrt{2}\right)$
   p. $g\left(\frac{1}{2}\right)$
   q. $g(2) + g(1)$
   r. $g(6) - g(2)$

2. Dado que una variable es un marcador de posición, podemos sustituir x por letras que representan números. Sea $f(x) = 6x - 3$, y sea $g(x) = 0.5(4)^x$, y supón que a, b, c y h son números reales. Halla el valor de cada función para la entrada dada.

   a. $f(a)$
   b. $f(2a)$
   c. $f(b + c)$
   d. $f(2 + h)$
   e. $f(a + h)$
   f. $f(a + 1) - f(a)$
   g. $f(a + h) - f(a)$
   h. $g(b)$
   i. $g(b + 3)$
   j. $g(3b)$
   k. $g(b - 3)$
   l. $g(b + c)$
   m. $g(b + 1) - g(b)$

3. ¿Cuál es el rango de cada una de las siguientes funciones?

   a. Sea $f(x) = 9x - 1$.
   b. Sea $g(x) = 3^{2x}$.
   c. Sea $f(x) = x^2 - 4$.
   d. Sea $h(x) = \sqrt{x} + 2$.
   e. Sea $a(x) = x + 2$ tal que x es un entero positivo.
   f. Sea $g(x) = 5^x$ para $0 \leq x \leq 4$.

4. Proporciona un dominio y un rango adecuados para completar la definición de cada función.

   a. Sea $f(x) = 2x + 3$.
   b. Sea $f(x) = 2^x$.
   c. Sea $C(x) = 9x + 130$, donde $C(x)$ es el número de calorías de un sándwich que contiene x gramos de grasa.
   d. Sea $B(x) = 100(2)^x$, donde $B(x)$ es el número de bacterias a las x horas en el transcurso de un día.

5. Sea $f: X \to Y$, donde X y Y son el conjunto de todos los números reales, y x y h son números reales.

   a. Halla una función f tal que la ecuación $f(x + h) = f(x) + f(h)$ no sea verdadera para todos los valores de x y h. Justifica tu razonamiento.
   b. Halla una función f tal que la ecuación $f(x + h) = f(x) + f(h)$ sea verdadera para todos los valores de x y h. Justifica tu razonamiento.
   c. Sea $f(x) = 2^x$. Halla un valor para x y un valor para h que haga que $f(x + h) = f(x) + f(h)$ sea un enunciado numérico verdadero.

6. Dada la función f cuyo dominio es el conjunto de números reales, sea $f(x) = 1$ si x es un número racional y sea $f(x) = 0$ si x es un número irracional.

   a. Explica por qué f es una función.

   b. ¿Cuál es el rango de f?

   c. Evalúa f para el valor de cada dominio que se muestra abajo.

$\boldsymbol{x}$	$\frac{2}{3}$	0	-5	$\sqrt{2}$	π
$\boldsymbol{f(x)}$					

   d. Enumera tres soluciones posibles de la ecuación $f(x) = 0$.

Esta página queda en blanco intencionalmente.

Lección 11: La gráfica de una función

Trabajo en clase

En el Módulo 1, representaste gráficamente ecuaciones como $y = 10 - 4x$ ubicando los puntos en el plano cartesiano al elegir valores de x y luego utilizando la ecuación para hallar el valor de y para cada valor de x. El número de pares ordenados que marcaste para obtener la forma general de la gráfica dependía del tipo de ecuación (lineal, cuadrática, etc.). La gráfica de la ecuación entonces era una representación del conjunto de soluciones, que se puede describir mediante la notación de conjuntos.

En esta lección, ampliaremos un poco la notación de conjuntos para describir la gráfica de una función. Al hacerlo, explicaremos una manera de pensar la notación de conjuntos para la gráfica de una función que imita las instrucciones que una tableta o una computadora portátil podría ejecutar para trazar una gráfica en su pantalla.

Desafío exploratorio 1

Los programas informáticos son básicamente instrucciones que se les dan a las computadoras sobre qué hacer cuando el usuario (¡tú!) realiza un pedido. Por ejemplo, cuando escribes una letra en tu teléfono inteligente, el teléfono realiza una serie de instrucciones específicas para dibujar esa letra en la pantalla y registrarla en la memoria (como parte de un mensaje de correo electrónico, por ejemplo). Uno de los tipos de instrucciones más simples que una computadora puede ejecutar es el bucle *for-next*. El siguiente es un código para un programa que muestra en pantalla las primeras 5 potencias de 2. Todos los códigos de programación se presentarán en inglés para que puedas utilizarlos directamente en tu tableta o computadora portátil.

Declare x integer
For all x from 1 to 5
Print 2^x
Next x

Significado de los códigos de programación en inglés:

- *Declare* es declarar.
- *For all* es para todas.
- *Next* es aumentar.
- *Print* es mostrar en pantalla.
- *Initialize* es inicializar.
- *Append* es añadir.
- *Plot* es trazar.
- *True* es verdadero.
- *False* es falso.
- *If-then* es si-entonces.

El resultado de este código de programación es

2
4
8
16
32

Esta es una descripción de las instrucciones: primero, x se cuantifica como un entero, lo cual significa que la variable solo puede tomar valores enteros y no puede tomar valores como $\frac{1}{3}$ o $\sqrt{2}$. El enunciado *For* inicia el bucle comenzando con $x = 1$.

Las instrucciones entre *For* y *Next* se ejecutan para el valor $x = 1$, que en este caso es *Print* 2. (*Print* significa "mostrar en la pantalla de la computadora"). Luego, la computadora ejecuta las instrucciones otra vez para la siguiente x ($x = 2$), es decir, *Print* 4, y así sucesivamente hasta que la computadora ejecute las instrucciones para $x = 5$, es decir, *Print* 32.

Ejercicio 1

Ejecuta las instrucciones del siguiente código de programación como si fueras una computadora y tu hoja fuera la pantalla.

Declare x integer
For all x from 2 to 8
  Print $2x+3$
Next x

Desafío exploratorio 2

Podemos usar casi el mismo código para construir un conjunto: primero, comenzamos con un conjunto que contiene cero elementos (llamado *conjunto vacío*), y luego aumentamos el tamaño del conjunto añadiendo un elemento nuevo en cada paso *for-next*.

Declare x integer
Initialize G as $\{\}$
For all x from 2 to 8
  Append $2x+3$ to G
  Print G
Next x

Observa que G se muestra en la pantalla luego de añadir cada número nuevo. De este modo, el resultado muestra cómo se construye el conjunto:

$\{7\}$
$\{7, 9\}$
$\{7, 9, 11\}$
$\{7, 9, 11, 13\}$
$\{7, 9, 11, 13, 15\}$
$\{7, 9, 11, 13, 15, 17\}$
$\{7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$.

Ejercicio 2

También podemos construir un conjunto añadiendo pares ordenados. Ejecuta las instrucciones del siguiente código de programación como si fueras una computadora y tu hoja fuera la pantalla (las primeras están hechas como ejemplo).

Declare x integer
Initialize G as $\{\}$
For all x from 2 to 8
Append $(x, 2x+3)$ to G
Next x
Print G

Resultado:

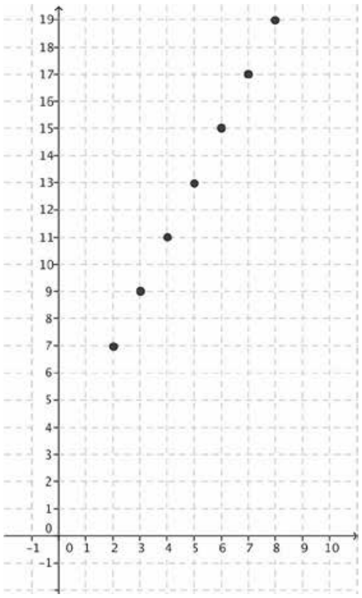
$\{(2,7), (3,9),$ ____________________________________$\}$

Desafío exploratorio 3

En lugar de mostrar en la pantalla (*Print*) el conjunto G, podemos usar otro comando, *Plot*, para ubicar los puntos en un plano cartesiano.

Declare x integer
Initialize G as $\{\}$
For all x from 2 to 8
Append $(x, 2x+3)$ to G
Next x
Plot G

Resultado:



En matemáticas, el código de programación anterior se puede escribir de forma compacta mediante la notación de conjuntos, de esta manera:

$$\{(x, 2x+3) \mid x \text{ entero y } 2 \leq x \leq 8\}.$$

Esta notación de conjuntos es una abreviatura de "El conjunto de todos los puntos $(x, 2x+3)$ tal que x es un entero y $2 \leq x \leq 8$". Observa cómo el conjunto de pares ordenados generado por el código *for-next* anterior,

$$\{(2,7), (3,9), (4,11), (5,13), (6,15), (7,17), (8,19)\},$$

también satisface los requisitos descritos por $\{(x, 2x+3) \mid x \text{ entero}, 2 \leq x \leq 8\}$. Esa es la razón por la que la notación de conjuntos de la forma

$$\{\text{tipo de elemento} \mid \text{condición de cada elemento}\}$$

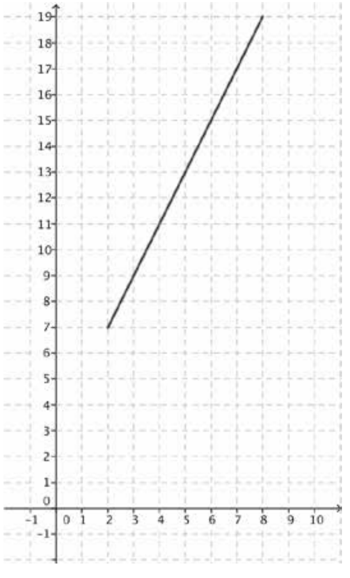
a veces se denomina *notación constructiva de conjuntos*, porque se puede considerar que construye el conjunto de la misma manera que el código *for-next*.

Discusión

Ahora podemos actualizar nuestra noción de un bucle *for-next* haciendo un experimento mental. Imagina un bucle *for-next* que pasa por *todos* los números reales en un intervalo (no solo los enteros). En realidad, ninguna computadora puede hacer eso, ya que las computadoras solo pueden realizar un número finito de cálculos. Pero los cerebros humanos son muy superiores a cualquier computadora, y podemos imaginarnos fácilmente cómo se vería. Esta es una muestra del código:

Declare x real
Let $f(x) = 2x + 3$
Initialize G as $\{\}$
For all x such that $2 \leq x \leq 8$
    Append $(x, f(x))$ to G
Next x
Plot G

El resultado de este código mental es la gráfica de f para todos los números reales x en el intervalo $2 \leq x \leq 8$:



EUREKA MATH

Ejercicio 3

a. Traza la función f en el plano cartesiano utilizando el siguiente código mental *for-next*.

Declare x real
Let $f(x) = x^2 + 1$
Initialize G as $\{\}$
For all x such that $-2 \leq x \leq 3$
Append $(x, f(x))$ to G
Next x
Plot G

b. En cada paso del bucle *for-next*, ¿cuál es el valor de entrada?

c. En cada paso del bucle *for-next*, ¿cuál es el valor de salida?

d. ¿Cuál es el dominio de la función f?

e. ¿Cuál es el rango de la función f?

Cierre

El conjunto G construido a partir del código mental *for-next* del Ejercicio 4 también se puede escribir de forma compacta utilizando la notación de conjuntos:

$$\{(x, x^2 + 1) \mid x \text{ real}, -2 \leq x \leq 3\}.$$

Cuando se piensa este conjunto trazado en el plano cartesiano, la gráfica es la misma. Cuando veas esta notación de conjuntos en el Grupo de problemas o en estudios futuros, será útil que imagines esta notación constructiva de conjuntos como una descripción de un bucle *for-next*.

En general, si $f\colon\ D \to Y$ es una función con dominio D, entonces su ***gráfica*** es el conjunto de todos los pares ordenados,

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\},$$

pensado como una figura geométrica en el plano de coordenadas cartesianas. (El símbolo $\in$ simplemente significa “en”. El enunciado $x \in D$ se lee “x en D”).

Resumen de la lección

GRÁFICA DE f: dada una función f cuyo dominio D y rango son subconjuntos de los números reales, la gráfica de f es el conjunto de pares ordenados en el plano cartesiano dado por

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}.$$

Grupo de problemas

1. Ejecuta las instrucciones de los siguientes códigos de programación como si fueras una computadora y tu hoja fuera la pantalla.

   a.

   ```
   Declare x integer
   For all x from 0 to 4
           Print 2x
   Next x
   ```

   b.

   ```
   Declare x integer
   For all x from 0 to 10
           Print 2x + 1
   Next x
   ```

   c.

   ```
   Declare x integer
   For all x from 2 to 8
           Print x^2
   Next x
   ```

   d.

   ```
   Declare x integer
   For all x from 0 to 4
           Print 10 · 3^x
   Next x
   ```

2. Ejecuta las instrucciones de los siguientes códigos de programación como si fueras una computadora y tu hoja fuera la pantalla.

a.

Declare x integer
Let $f(x) = (x+1)(x-1) - x^2$
Initialize G as $\{\}$
For all x from -3 to 3
  Append $\left(x, f(x)\right)$ to G
Next x
Plot G

b.

Declare x integer
Let $f(x) = 3^{-x}$
Initialize G as $\{\}$
For all x from -3 to 3
  Append $\left(x, f(x)\right)$ to G
Next x
Plot G

c.

Declare x real
Let $f(x) = x^3$
Initialize G as $\{\}$
For all x such that $-2 \leq x \leq 2$
  Append $\left(x, f(x)\right)$ to G
Next x
Plot G

3. Responde las siguientes preguntas acerca del código mental:

Declare x real
Let $f(x) = (x - 2)(x - 4)$
Initialize G as $\{\}$
For all x such that $0 \leq x \leq 5$
Append $(x, f(x))$ to G
Next x
Plot G

a. ¿Cuál es el dominio de la función f?

b. Traza la gráfica de f según las instrucciones del código mental.

c. Observa tu gráfica de f. ¿Cuál es el rango de f?

d. Escribe tres o cuatro oraciones para describir en palabras cómo funciona el código mental.

4. Traza la gráfica de las funciones definidas por las siguientes fórmulas y escribe la gráfica de f como un conjunto utilizando la notación constructiva de conjuntos. (Pista: supón que el dominio son todos los números reales a menos que se especifique en el problema).

a. $f(x) = x + 2$

b. $f(x) = 3x + 2$

c. $f(x) = 3x - 2$

d. $f(x) = -3x - 2$

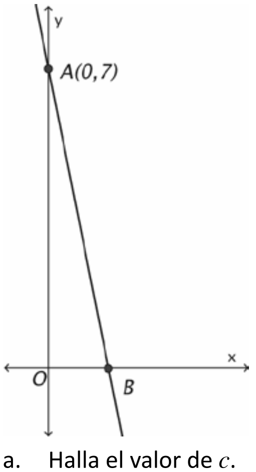
e. $f(x) = -3x + 2$

f. $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2, -3 \leq x \leq 3$

g. $f(x) = (x + 1)^2 - x^2, -2 \leq x \leq 5$

h. $f(x) = (x + 1)^2 - (x - 1)^2, -2 \leq x \leq 4$

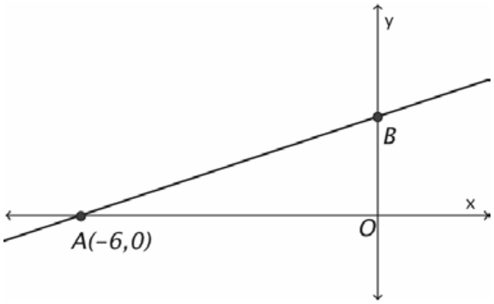
5. La figura muestra la gráfica de $f(x) = -5x + c$.



a. Halla el valor de c.

b. Si la gráfica de f se interseca con el eje x en B, halla las coordenadas de B.

6. La figura muestra la gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}x + c$.



a. Halla el valor de c.

b. Si la gráfica de f interseca el eje y en B, halla las coordenadas de B.

c. Halla el área del triángulo AOB.

Lección 12: La gráfica de la ecuación $y = f(x)$

Trabajo en clase

En el Módulo 1, representaste gráficamente ecuaciones como $4x + y = 10$ ubicando los puntos en el plano de coordenadas cartesianas que correspondían a todos los pares ordenados de números (x, y) que estaban en el conjunto de soluciones. A la figura geométrica que se formó al ubicar esos puntos en el plano la llamamos *gráfica de la ecuación de dos variables*.

En esta lección, extendemos esta idea de la gráfica de una ecuación a la gráfica de $y = f(x)$ para una función f. Al hacer esto, utilizamos el código mental informático para describir el proceso mediante el cual se generan los pares ordenados en la gráfica de $y = f(x)$.

Ejemplo 1

En la lección anterior, estudiamos un tipo de instrucción simple que ejecutan las computadoras llamado bucle *for-next*. Otro tipo de instrucción simple es el *enunciado if-then*. A continuación, verás un ejemplo del código de un programa que busca el resultado verdadero y muestra en pantalla "*True*" cuando $x + 2 = 4$; de lo contrario, muestra en pantalla "*False*".

```
Declare x integer
For all x from 1 to 4
    If x + 2 = 4 then
        Print True
      else
        Print False
    End if
Next x
```

El resultado de este código de programación es:

Falso
Verdadero
Falso
Falso

Observa que el enunciado *if-then* del código anterior solo comprueba si cada número del bucle se encuentra en el conjunto de soluciones.

Ejemplo 2

Ejecuta las instrucciones del siguiente código de programación como si fueras una computadora y tu hoja fuera la pantalla.

```
Declare x integer
Initialize G as {}
For all x from 0 to 4
    If x^2 − 4x + 5 = 2 then
        Append x to G
    else
        Do NOT append x to G
    End if
Next x
Print G
```

Resultado: $\{1, 3\}$

Discusión

Compara el código *for-next*/*if-then* anterior con la siguiente notación constructiva de conjuntos que utilizamos para describir los conjuntos de soluciones en el Módulo 1:

$$\{\text{entero } x \mid 0 \le x \le 4 \text{ y } x^2 - 4x + 5 = 2\}.$$

Comprueba si la notación constructiva de conjuntos también genera el conjunto $\{1, 3\}$. *Cuando se utiliza la notación constructiva de conjuntos para describir un conjunto, una forma efectiva de interpretar esa notación es pensar que el conjunto fue generado por algún programa como los códigos* for-next *o* if-then *anteriores.*

Desafío exploratorio 1

A continuación verás un código que genera una gráfica de una *ecuación de dos variables* $y = x(x-2)(x+2)$ para x en $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y y en $\{-3, 0, 3\}$. El conjunto de soluciones para esta ecuación se genera al comprobar si cada par ordenado (x, y) en el conjunto

$$\{(-2,-3), (-2,0), (-2,3), (-1,-3), (-1,0), (-1,3), \ldots, (2,-3), (2,0), (2,3)\}$$

es una solución de la ecuación $y = x(x-2)(x+2)$. Entonces, la gráfica es solo el diagrama de soluciones en el plano cartesiano. Podemos dar instrucciones a una computadora para que halle estos puntos y los ubique mediante el siguiente programa:

```
Declare x and y integers
Initialize G as {}
For all x in {−2, −1, 0, 1, 2}
    For all y in {−3, 0, 3}
        If y = x(x − 2)(x + 2) then
            Append (x, y) to G
        else
            Do NOT append (x, y) to G
        End if
    Next y
Next x
Print G
Plot G
```

Comprueba si (x, y) es una solución.

Recorre cada y para $x = -2$, luego para $x = -1$ y así sucesivamente (observa las flechas en la siguiente tabla).

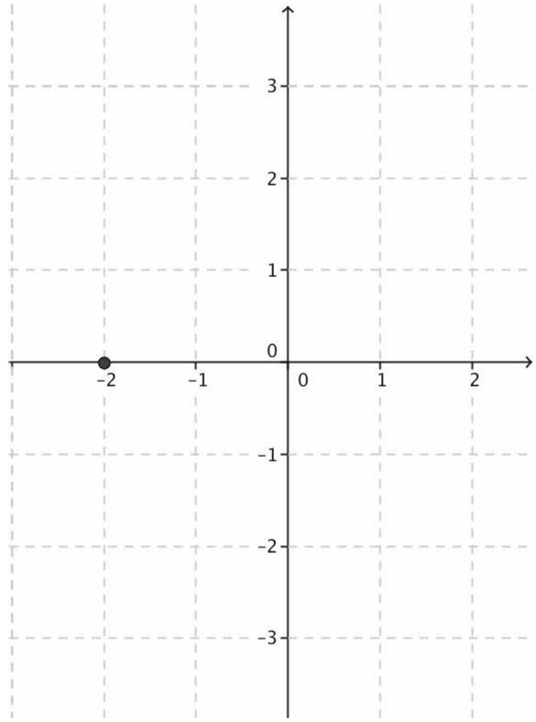
a. Utiliza la siguiente tabla para registrar las decisiones que tomaría una computadora al seguir estas instrucciones. Completa cada celda con “Sí” o “No” según se pueda añadir el par ordenado (x, y) o no. (El paso donde $x = -2$ ya está hecho).

	$x = -2$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$
$y = 3$	No				
$y = 0$	Sí				
$y = -3$	No				

b. ¿Cuál sería el resultado del comando *Print G*? (El primer par ordenado ya está escrito).

Resultado:
{ $(-2,0)$, __________, __________, __________, __________}

c. Traza el conjunto de soluciones G en el plano cartesiano. (El primer par ordenado de G ya está trazado).



Desafío exploratorio 2

El código de programación del Ejercicio 3 es una forma de imaginar cómo la notación constructiva de conjuntos genera conjuntos de soluciones y figuras en el plano. Dada una función $f(x) = x(x-2)(x-3)$ cuyo dominio y rango son todos los números reales, se puede realizar una pequeña modificación al código de programación anterior para generar la gráfica de la ecuación $y = f(x)$:

$$\{(x, y) \mid x \text{ real} \quad \text{y} \quad y = f(x)\}.$$

Aunque el siguiente código mental no puede ejecutarse en una computadora, los estudiantes pueden ejecutarlo mentalmente.

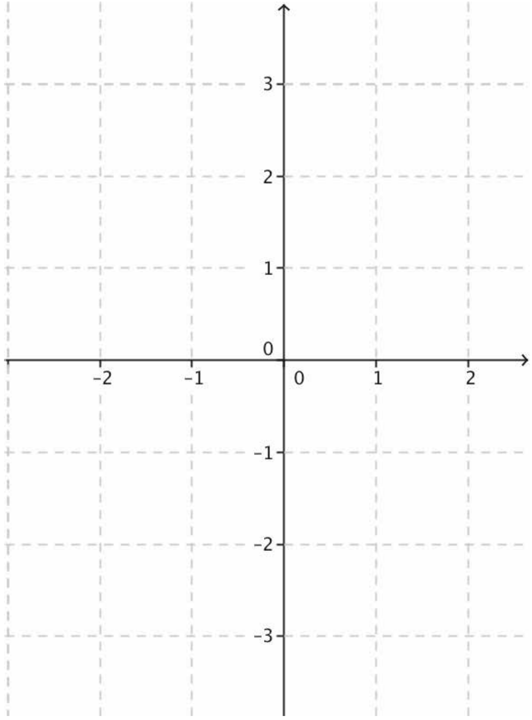
Declare x and y real
Let $f(x) = x(x-2)(x+2)$
Initialize G as $\{\}$
For all x in the real numbers
    For all y in the real numbers
        If $y = f(x)$ then
            Append (x, y) to G
        else
            Do NOT append (x, y) to G
        End if
    Next y
Next x
Plot G

Comprueba si (x, y) es una solución para $y = x(x-2)(x+2)$.

Para cada valor de x el código recorre todos los valores de y.

EUREKA MATH

a. Ubica G en el plano cartesiano (la figura trazada es la gráfica de $y = f(x)$).



b. Describe cómo el código mental es similar a la notación constructiva de conjuntos $\{(x, y) \mid x \text{ real} \quad \text{y} \quad y = f(x)\}$.

c. En la coordenada x de $\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{16}{9}\sqrt{3}\right)$ se produce un *máximo relativo* para la función f. Sustituye este punto en la ecuación $y = x(x^2 - 4)$ para comprobar que es una solución para $y = f(x)$ y, luego, ubica el punto en tu gráfica.

d. En la coordenada x de $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{16}{9}\sqrt{3}\right)$ se produce un *mínimo relativo* para la función f. Un cálculo similar al que hiciste antes muestra que este punto también es una solución para $y = f(x)$. Ubica este punto en tu gráfica.

e. Observa tu gráfica. ¿En qué intervalo(s) decrece la función f?

f. Observa tu gráfica. ¿En qué intervalo(s) crece la función f?

Resumen de la lección

- **GRÁFICA DE $\boldsymbol{y = f(x)}$:** dada una función f cuyo dominio D y rango son subconjuntos de los números reales, la *gráfica de* $y = f(x)$ es el conjunto de pares ordenados (x, y) en el plano cartesiano dado por

$$\{(x, y) \mid x \in D \text{ y } y = f(x)\}.$$

  Cuando escribimos $\{(x, y) \mid y = f(x)\}$ para la gráfica de $y = f(x)$, se entiende que el dominio es el conjunto más grande de números reales para el cual se define la función f.

- La gráfica de f es igual a la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

- **CRECIENTE/DECRECIENTE:** dada una función f cuyo dominio y rango son subconjuntos de los números reales y donde I es un intervalo contenido en el dominio, se dice que la función *crece en el intervalo I* si

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I.$$

  Se dice que la función *decrece en el intervalo I* si

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I.$$

Grupo de problemas

1. Ejecuta las instrucciones del siguiente código de programación como si fueras una computadora y tu hoja fuera la pantalla.

```
Declare x integer
For all x from 1 to 6
    If x^2 −2 = 7 then
        Print True
      else
        Print False
    End if
Next x
```

2. Responde las siguientes preguntas acerca del código de programación.

Declare x **integer**
Initialize G **as** $\{\}$
For all x **from** -3 **to** 3
    If $2^x + 2^{-x} = \frac{17}{4}$ **then**
        Append x **to** G
    else
        Do NOT append x **to** G
    End if
Next x
Print G

a. Ejecuta las instrucciones del código de programación como si fueras una computadora y tu hoja fuera la pantalla de la computadora.

b. Utiliza la notación constructiva de conjuntos para escribir una descripción del conjunto G.

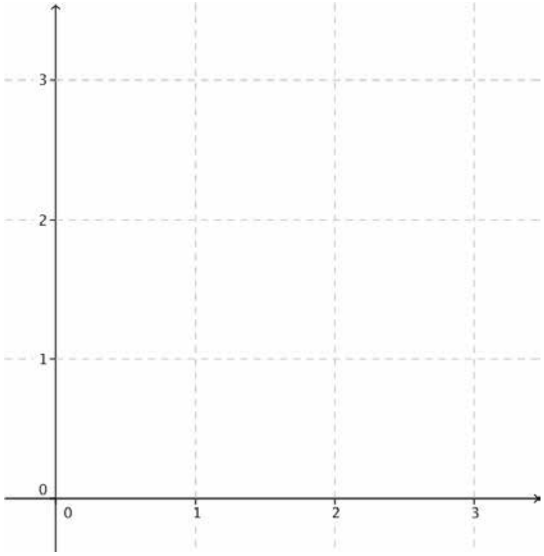
3. Responde las siguientes preguntas acerca del código de programación.

Declare x **and** y **integers**
Initialize G **as** $\{\}$
For all x **in** $\{0, 1, 2, 3\}$
    For all y **in** $\{0, 1, 2, 3\}$
        If $y = \sqrt{4 + 20x - 19x^2 + 4x^3}$ **then**
            Append (x, y) **to** G
        else
            Do NOT append (x, y) **to** G
        End if
    Next y
Next x
Plot G

a. Utiliza la siguiente tabla para registrar las decisiones que tomaría una computadora al seguir estas instrucciones. Completa cada celda con "Sí" o "No" según se pueda añadir el par ordenado (x, y) o no.

	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
$y = 3$				
$y = 2$				
$y = 1$				
$y = 0$				

b. Traza el conjunto G en el plano cartesiano.



4. Responde las siguientes preguntas acerca del código mental.

```
Declare x and y real
Let f(x) = -2x + 8
Initialize G as {}
For all x in the real numbers
    For all y in the real numbers
        If y = f(x) then
            Append (x, y) to G
          else
            Do NOT append (x, y) to G
        End if
    Next y
Next x
Plot G
```

a. ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = -2x + 8$?

b. ¿Cuál es el rango de la función $f(x) = -2x + 8$?

c. Escribe el conjunto G generado por el código mental en la notación constructiva de conjuntos.

d. Traza el conjunto G para obtener la gráfica de la función $f(x) = -2x + 8$.

e. La función $f(x) = -2x + 8$ es claramente una función decreciente en el dominio de los números reales. Muestra que la función satisface la definición de decreciente para los puntos 8 y 10 de la recta numérica; es decir, muestra que, como $8 < 10$, entonces $f(8) > f(10)$.

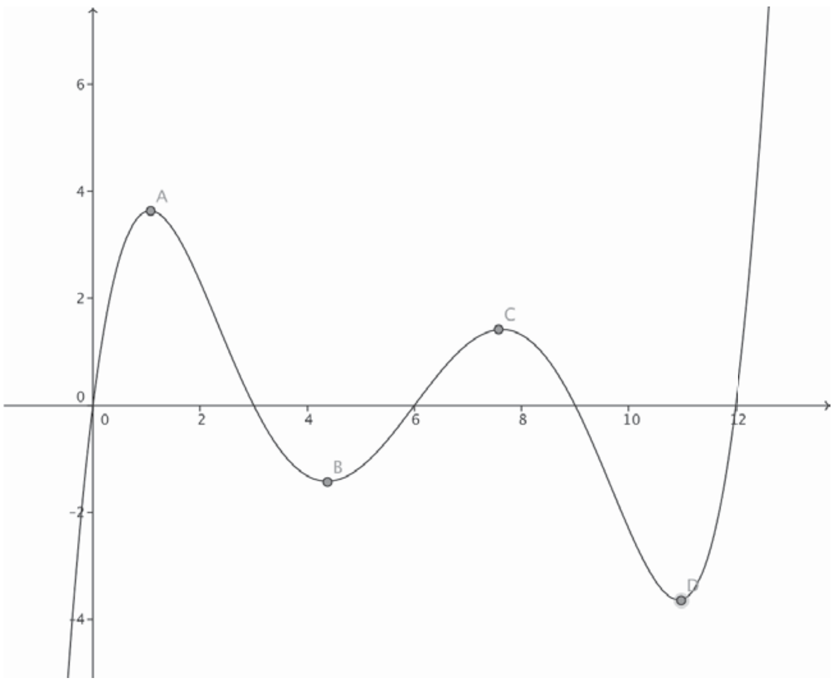
5. Traza la gráfica de las funciones definidas por las siguientes fórmulas y escribe la gráfica de $y = f(x)$ como un conjunto. Utiliza la notación constructiva de conjuntos. (Pista: para cada una de las siguientes funciones, puedes suponer que el dominio son todos los números reales).
   a. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 6$
   b. $f(x) = x^2 + 3$
   c. $f(x) = x^2 - 5x + 6$
   d. $f(x) = x^3 - x$
   e. $f(x) = -x^2 + x - 1$
   f. $f(x) = (x - 3)^2 + 2$
   g. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$

6. Responde las siguientes preguntas acerca del conjunto:

$$\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2 \text{ y } y = 9 - 4x^2\}.$$

   a. La ecuación se puede reescribir como $y = f(x)$ donde $f(x) = 9 - 4x^2$. ¿Cuáles son el dominio y el rango de la función f especificada por el conjunto?
      i. Dominio:
      ii. Rango:
   b. Escribe un código mental que se generará, como el del Problema 4, y luego traza el conjunto.

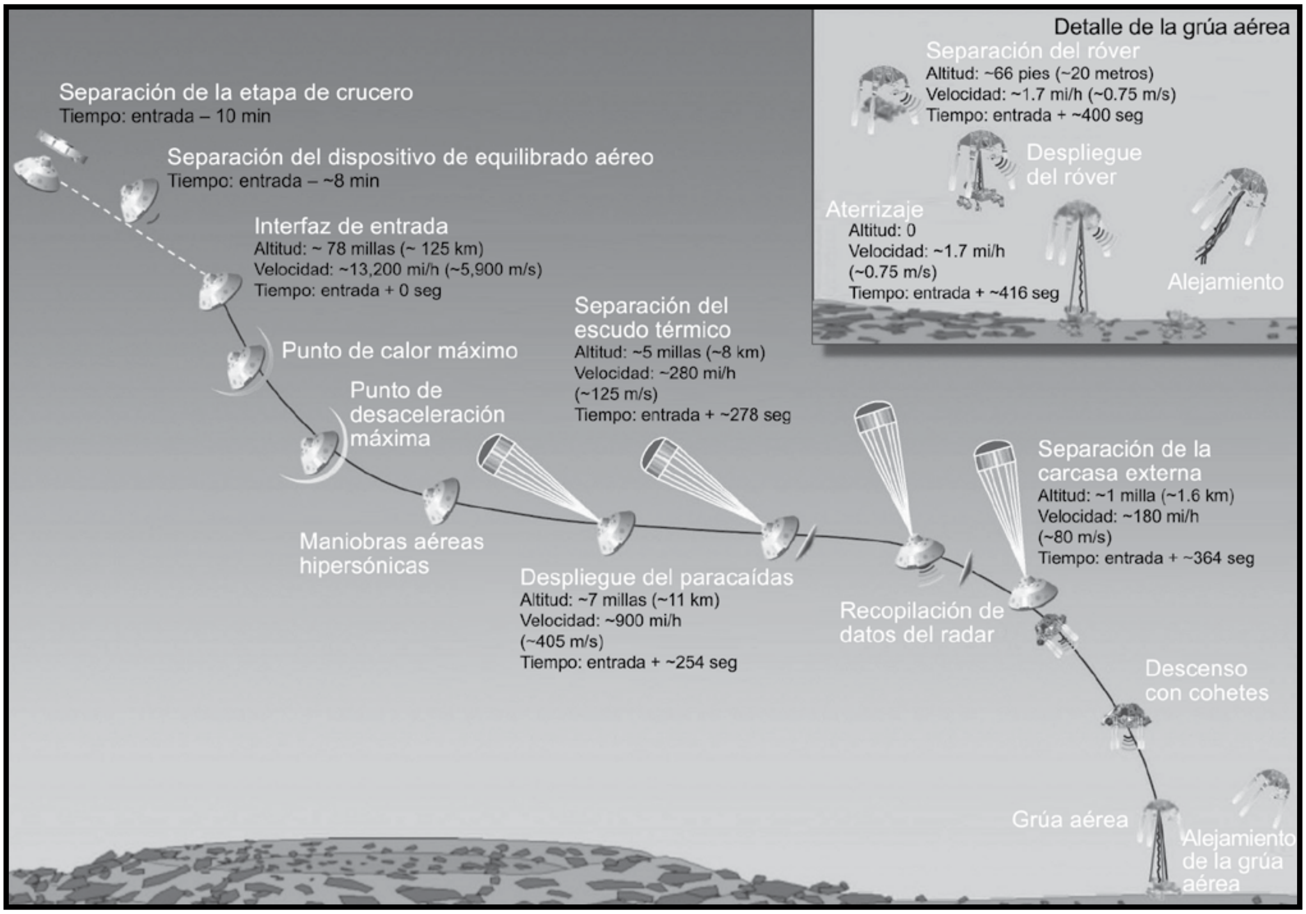
7. Responde lo siguiente acerca de la gráfica de la función.
   a. ¿Qué puntos (A, B, C o D) son máximos relativos?
   b. ¿Qué puntos (A, B, C o D) son mínimos relativos?
   c. Nombra cualquier intervalo donde la función sea creciente.
   d. Nombra cualquier intervalo donde la función sea decreciente.



Lección 13: Interpretar la gráfica de una función

Trabajo en clase

La NASA compartió esta gráfica antes del aterrizaje del róver Curiosity en Marte el 6 de agosto de 2012. Muestra la secuencia de aterrizaje del róver Curiosity en la superficie del planeta.



Cortesía de la NASA/JPL-Caltech

¿Realmente representa esta imagen la ruta de aterrizaje del róver Curiosity? Crea un modelo que pueda utilizarse para predecir la altitud y la velocidad del róver Curiosity 5, 4, 3, 2 y 1 minuto antes de aterrizar.

Ejercicio de representación matemática

Crea un modelo como ayuda para resolver el problema y calcula aproximadamente la altitud y la velocidad en varios momentos durante la secuencia de aterrizaje.

Ejercicios

1. ¿Realmente representa esta imagen la ruta de aterrizaje del róver Curiosity?

2. Calcula aproximadamente la altitud y la velocidad del róver Curiosity 5, 4, 3, 2 y 1 minuto antes del aterrizaje. Explica cómo llegaste a tu cálculo aproximado.

3. De acuerdo con lo que viste en el video o en la animación, ¿crees que debes revisar tu trabajo? Explica por qué sí o por qué no y luego haz los cambios necesarios.

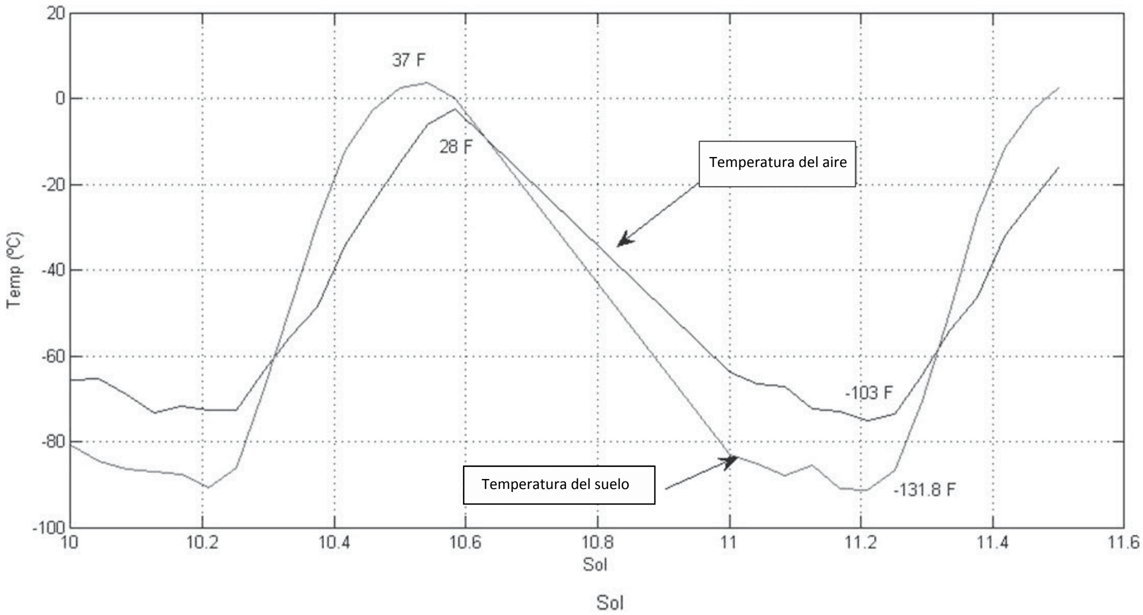
4. ¿Por qué la gráfica de la función de altitud decrece y la gráfica de la función de velocidad crece en este dominio?

5. ¿Por qué la gráfica de la función de velocidad es negativa? ¿Por qué esta gráfica no tiene un intercepto de t?

6. ¿Qué significa el intercepto de t de la gráfica de altitud? ¿Y el intercepto de y?

Un róver en Marte recopiló los siguientes datos de temperatura durante 1.6 días marcianos. Un día marciano se denomina sol. Utiliza la gráfica para responder las siguientes preguntas.

SENSOR DE TEMPERATURA DEL SUELO Y DEL AIRE



Cortesía de la NASA/JPL-Caltech/CAB(CSIC-INTA)

7. ¿Aproximadamente cuándo cambia cada gráfica de creciente a decreciente? ¿Y de decreciente a creciente?

8. ¿Cuándo aumenta la temperatura del aire?

9. ¿Cuándo disminuye la temperatura del suelo?

10. ¿Cuál es el cambio en la temperatura del aire en este intervalo de tiempo?

11. ¿Por qué crees que la temperatura del suelo cambió más que la del aire? ¿Es típico eso en la Tierra?

12. ¿Existe un momento en que el aire y el suelo tienen la misma temperatura? Explica cómo lo sabes.

Grupo de problemas

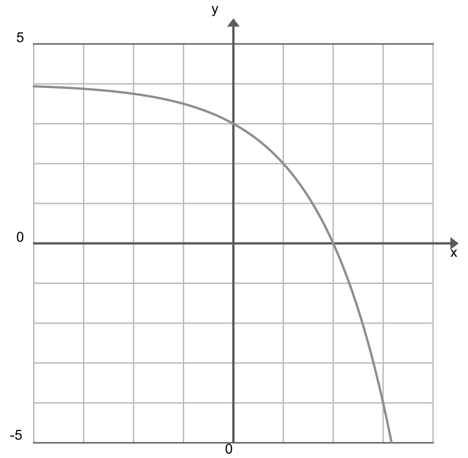
1. Crea un informe escrito breve en el que resumas tu trabajo sobre el problema del róver Curiosity de Marte. Incluye tus respuestas a las preguntas del problema original y al menos una recomendación para futuras investigaciones sobre este tema o preguntas adicionales que tengas sobre la situación.

2. Considera la parte de la secuencia de aterrizaje en la que desciende la grúa aérea.
   a. Crea una función lineal para representar la altitud del róver Curiosity como una función de tiempo. ¿Cuáles son los dos puntos que elegiste para crear tu función?
   b. Compara la pendiente de tu función con la velocidad. ¿Deberían ser iguales? Explica por qué sí o por qué no.
   c. Utiliza tu modelo lineal para determinar la altitud un minuto antes del aterrizaje. ¿Cómo comparas esta estimación con tu cálculo aproximado anterior? Explica las diferencias que halles.

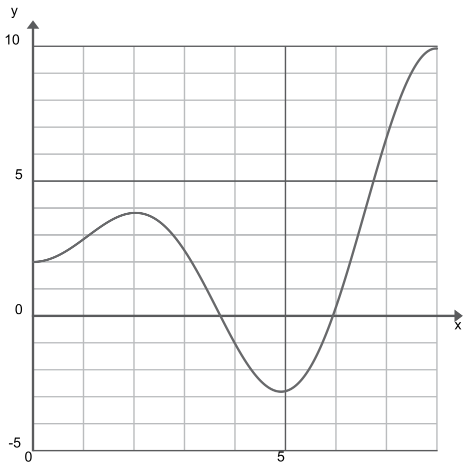
3. La función exponencial $g(t) = 125(0.99)^t$ podría utilizarse para representar la altitud del róver Curiosity durante su rápido descenso. ¿Crees que este modelo sería mejor o peor que el que creó tu grupo? Explica tu razonamiento.

4. Para cada una de las siguientes gráficas, identifica los intervalos crecientes y decrecientes, los intervalos positivos y negativos, y los interceptos.

a.



b.



Esta página queda en blanco intencionalmente.

Lección 14: Modelo exponencial y lineal—Comparar las tasas de crecimiento

Trabajo en clase

Ejemplo 1

Funciones lineales

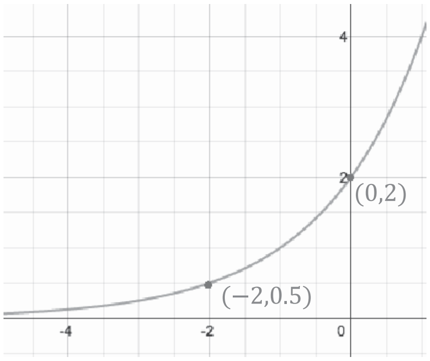
a. Traza los puntos $P_1 = (0{,}4)$ y $P_2 = (4{,}12)$. ¿Existen valores de m y b tales que la gráfica de la función lineal descrita por $f(x) = mx + b$ contenga a P_1 y P_2? De ser así, halla esos valores. Si no, explica por qué no existen.

b. Traza $P_1 = (0{,}4)$ y $P_2 = (0, -2)$. ¿Existen valores de m y b tales que la gráfica de una función lineal descrita por $f(x) = mx + b$ contenga P_1 y P_2? De ser así, halla esos valores. Si no, explica por qué no existen.

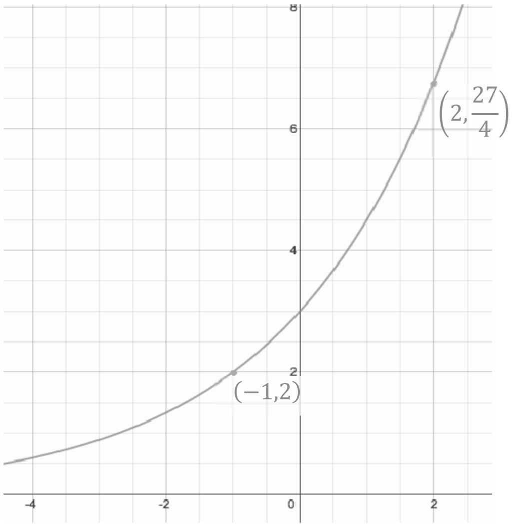
Funciones exponenciales

Las gráficas (c) y (d) representan una función exponencial con la forma $g(x) = ab^x$. Reescribe la función $g(x)$ utilizando los valores para a y b necesarios para que la gráfica que se muestra sea una gráfica de g.

c. $g(x) =$



d. $g(x) =$



Ejemplo 2

Un investigador de un laboratorio registra el crecimiento de la población de una colonia de levadura y descubre que la población se duplica cada hora.

a. Completa la tabla de datos del investigador:

Horas de estudio	0	1	2	3	4
Población de la colonia de levadura (en miles)	5				

b. ¿Cuál es la función exponencial que representa el crecimiento de la población de la colonia?

c. Tras varias horas de estudio, el investigador observa los datos y quiere que las mediciones sean más frecuentes. Sabiendo que la colonia se duplica cada hora, ¿cómo puede el investigador determinar la población en incrementos de media hora? Explica tu respuesta.

d. Completa la nueva tabla que incluye incrementos cada media hora.

Horas de estudio	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
Población de la colonia de levadura (en miles)	5						

e. ¿Cómo cambiaría el cálculo de los datos para incrementos de tiempo de 20 minutos? Explica tu respuesta.

f. Completa la nueva tabla que incluye incrementos cada 20 minutos.

Horas de estudio	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2
Población de la colonia de levadura (en miles)	5						

g. El asistente de laboratorio del investigador estudia los datos registrados y realiza la siguiente afirmación:

Como la población se duplica en 1 hora, entonces, la mitad de ese crecimiento se produce en la primera media hora y la otra mitad, en la segunda media hora. Deberíamos poder hallar la población en $t = \frac{1}{2}$ si tomamos el promedio de las poblaciones de $t = 0$ y $t = 1$.

¿Es correcto el razonamiento del asistente? Compara esta estrategia con tu trabajo de las partes (c) y (e).

Ejemplo 3

En 1920 se encomendó a un ingeniero de California especialista en proyecciones poblacionales que hallara un modelo que permitiera predecir el crecimiento de la población del estado. Este ingeniero representó el crecimiento de la población como una función de tiempo, t años desde 1900. Los datos del censo muestran que en el año 1900 la población era de 1,490 personas (en miles). En 1920, la población del estado de California era de 3,554 personas (en miles). Decidió explorar un modelo lineal y uno exponencial.

a. Utiliza los datos proporcionados para determinar la ecuación de la función lineal que representa el crecimiento de la población desde 1900 hasta 1920.

b. Utiliza los datos proporcionados y tu calculadora para determinar la ecuación de la función exponencial que representa el crecimiento de la población.

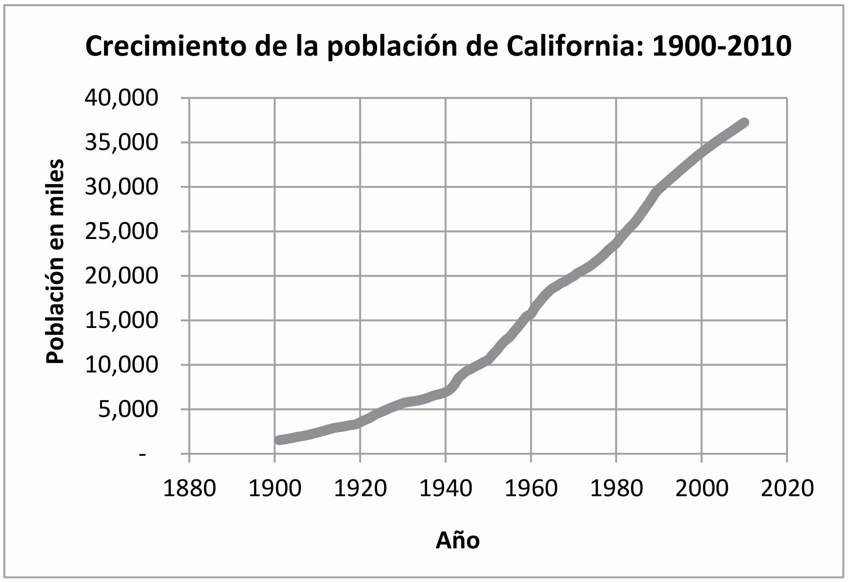
c. Utiliza las dos funciones para predecir la población para los siguientes años:

	Población proyectada según la función lineal, $f(t)$ (en miles)	**Población proyectada según la función exponencial, $g(t)$ (en miles)**	**Datos del censo de población y estimaciones intercensales para California (en miles)**
1935			6175
1960			15717
2010			37253

Cortesía de la Oficina del Censo de los Estados Unidos

d. ¿Cuál de estas funciones es un mejor modelo para la población de California en 1935 y en 1960?

e. ¿Alguno de estos modelos predice con mayor precisión la población para 2010? ¿Qué fenómeno explica el valor real de la población?



Resumen de la lección

- Dada una función lineal de la forma $L(x) = mx + k$ y una función exponencial de la forma $E(x) = ab^x$ para x, un número real, y las constantes m, k, a y b, considera la secuencia dada por $L(n)$ y la secuencia dada por $E(n)$, donde $n = 1,2,3,4,$ .... Ambas secuencias pueden escribirse recursivamente:

$$L(n+1) = L(n) + m \text{ y } L(0) = k, \text{ y}$$

$$E(n+1) = E(n) \cdot b \text{ y } E(0) = a.$$

  La primera secuencia muestra que una función lineal crece en forma aditiva por el mismo sumando m en intervalos de igual duración (es decir, los intervalos entre enteros consecutivos). La segunda secuencia muestra que una función exponencial crece en forma multiplicativa por el mismo factor b en intervalos de igual duración (es decir, los intervalos entre enteros consecutivos).

- Una función exponencial creciente finalmente supera a cualquier función lineal. Es decir, si $f(x) = ab^x$ es una función exponencial, donde $a > 0$ y $b > 1$, y $g(x) = mx + k$ es una función lineal, entonces existe un número real M tal que para todos los valores de $x > M$, $f(x) > g(x)$. No siempre esto resulta evidente en una calculadora gráfica; esto se debe a que las gráficas no se muestran completamente en la pantalla como para que podamos ver la elevación brusca de la función exponencial comparada con la función lineal.

Grupo de problemas

1. Cuando una pelota rebota hacia arriba y hacia abajo, la altura máxima que alcanza decrece con cada rebote de forma predecible. Supón que para cierto tipo de pelota de *squash* que se arroja en una cancha de *squash*, la altura máxima, $h(x)$, después de x número de rebotes, puede representarse de esta manera: $h(x) = 65\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

   a. ¿Cuántas veces mayor es la altura después del primer rebote comparada con la altura después del tercer rebote?

   b. Representa gráficamente los puntos $(x, h(x))$ para los valores de x 0, 1, 2, 3, 4 y 5.

2. Australia atravesó una grave peste a inicios del siglo XX. ¿Cuál era la peste? Los conejos. En 1859, Thomas Austin liberó 24 conejos en el parque Barwon. En 1926, había aproximadamente 10 mil millones de conejos en Australia. Obviamente, el gobierno de Australia destinó una enorme cantidad de tiempo y dinero para controlar el problema de los conejos. (Para saber más sobre este tema, visita el sitio web del Departamento de Medio Ambiente e Industrias Primarias de Australia, en la sección de Agricultura).

   a. Utiliza solo la información anterior como referencia para escribir una función exponencial que represente el crecimiento de la población de conejos en Australia.

   b. El modelo que creaste a partir de los datos del problema es, evidentemente, una gran simplificación de la función real del número de conejos en cualquier año dado desde 1859 hasta 1926. Nombra al menos un factor de complicación (relacionado con los conejos) que pueda hacer que la gráfica de tu función se vea muy diferente a la gráfica de la función real.

3. Después de graduarse de la universidad, Jane tuvo dos ofertas de trabajo para considerar. En el trabajo A, el sueldo es de $\$100{,}000$ por año, pero no hay ninguna posibilidad de aumento. Jane sabe que algunos de sus pares reciben este tipo de ofertas apenas terminan sus estudios universitarios. El trabajo B es para una empresa nueva de redes sociales, que garantiza un sueldo de solo $\$10{,}000$ por año. El fundador está seguro de que el concepto de la empresa será el próximo gran éxito en el campo de las redes sociales y promete un aumento de sueldo del 25% al comienzo de cada año.

   a. ¿Cuál de los dos trabajos tendrá un sueldo anual más alto al comienzo del quinto año? ¿Cuál será aproximadamente la diferencia entre ambos?

   b. ¿Cuál de los dos trabajos tendrá un sueldo anual más alto al comienzo del décimo año? ¿Cuál será aproximadamente la diferencia entre ambos?

   c. ¿Cuál de los dos trabajos tendrá un sueldo anual más alto al comienzo del vigésimo año? ¿Cuál será aproximadamente la diferencia entre ambos?

   d. Si estuvieras en el lugar de Jane, ¿qué trabajo aceptarías?

4. La población de un pueblo en el año 2007 era de $15{,}000$ personas. El pueblo obtiene el agua de un lago cercano y de un sistema de ríos que tienen capacidad para proveer a $30{,}000$ personas. Debido a que se encuentra cerca de una ciudad grande y de una autopista, la población del pueblo comenzó a crecer más rápido que en el pasado. La siguiente tabla muestra los recuentos de la población para cada año desde 2007 hasta 2012.

   a. Escribe una función de x que se empareje lo más posible con esos puntos de datos para los valores de x 0, 1, 2, 3, 4 y 5.

Año	**Años después de 2007**	**Población del pueblo**
2007	0	$15{,}000$
2008	1	$15{,}600$
2009	2	$16{,}224$
2010	3	$16{,}873$
2011	4	$17{,}548$
2012	5	$18{,}250$

   b. Supón que la función es un buen modelo para el crecimiento de la población desde 2012 hasta 2032. ¿En qué año, durante el periodo entre 2012 y 2032, será insuficiente la cantidad disponible de agua para toda la población?

Esta página queda en blanco intencionalmente.

Lección 15: Funciones a trozos

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

Para cada número real a, el *valor absoluto de a* es la distancia entre 0 y a en la recta numérica y se denota $|a|$.

1. Resuelve cada ecuación de una variable.

   a. $|x| = 6$ b. $|x - 5| = 4$ c. $2|x + 3| = -10$

2. Determina al menos cinco soluciones para cada ecuación de dos variables. Asegúrate de que algunas soluciones contengan valores negativos para x o y.

   a. $y = |x|$

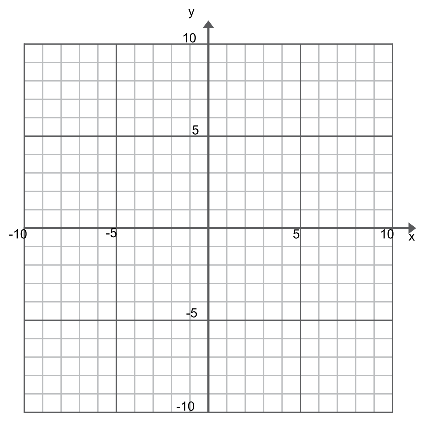
   b. $y = |x - 5|$

   c. $x = |y|$

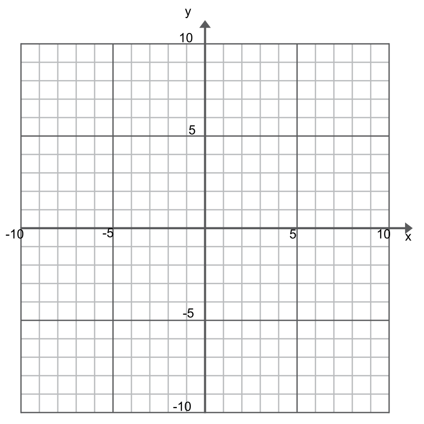
Desafío exploratorio 1

Para las partes (a) a (c), crea gráficas del conjunto de soluciones de cada ecuación de dos variables del Ejercicio inicial 2.

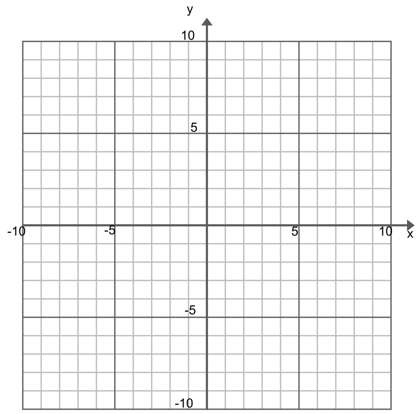
a. $y = |x|$



b. $y = |x - 5|$



c. $x = |y|$



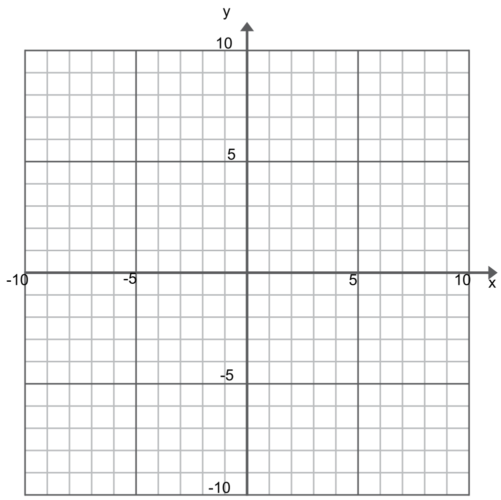
d. Escribe un resumen breve para comparar y contrastar los tres conjuntos de soluciones y sus gráficas.

Para las partes (e) a (j), considera la función $f(x) = |x|$, donde x puede ser cualquier número real.

e. Explica el significado de la función f con tus propias palabras.

f. Indica el dominio y el rango de esta función.

g. Crea una gráfica de la función f. Podrías comenzar enumerando varios pares ordenados que representen los elementos correspondientes del dominio y el rango.

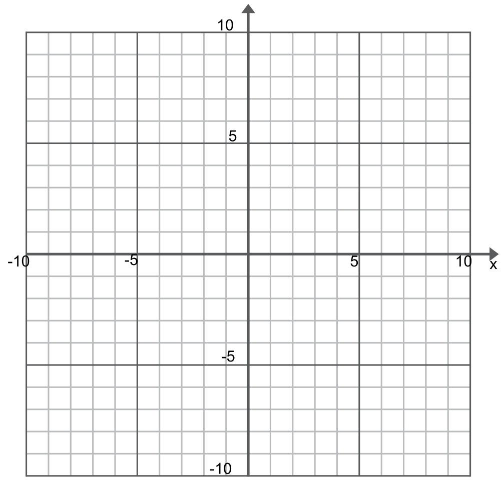


h. ¿Qué comparación puedes hacer entre la función de valor absoluto y la gráfica de $y = |x|$?

i. Define una función cuya gráfica sea idéntica a la gráfica de $y = |x - 5|$.

j. ¿Podrías definir una función cuya gráfica sea idéntica a la gráfica de $x = |y|$? Explica tu razonamiento.

k. Sea $f_1(x) = -x$ para $x < 0$, y sea $f_2(x) = x$ para ≥ 0 . Representa gráficamente las funciones f_1 y f_2 en el mismo plano cartesiano. ¿Qué comparación puedes hacer entre estas dos funciones y la gráfica de la parte (g)?



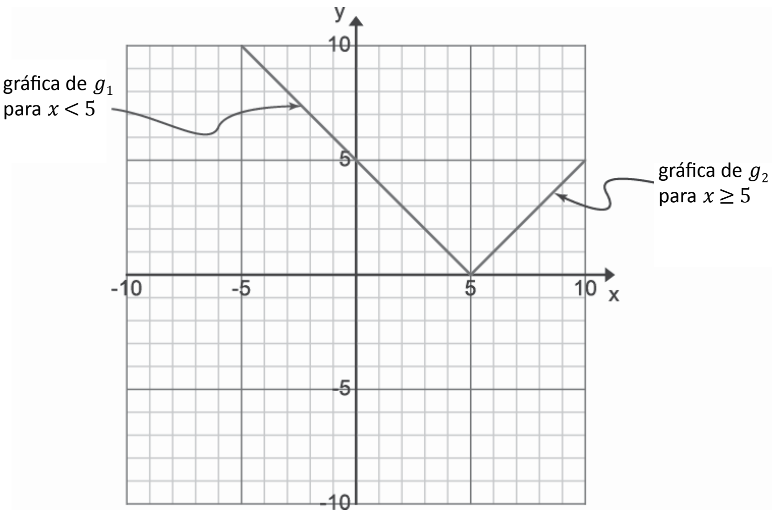
Definición:

La *función de valor absoluto* f se define estableciendo $f(x) = |x|$ para todos los números reales. Otra manera de escribir f es como una función lineal a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1

Sea $g(x) = |x - 5|$. La gráfica de g es igual a la gráfica de la ecuación $y = |x - 5|$ que trazaste en la parte (b) del Desafío exploratorio 1. Utiliza esta nueva versión de la gráfica para reescribir la función g como una función a trozos.



Identifica la gráfica de la función lineal con una pendiente negativa como g_1 y la gráfica de la función lineal con una pendiente positiva como g_2, como en la imagen de arriba.

Función g_1: la pendiente de g_1 es -1 (¿por qué?), y el intercepto de y es 5; por lo tanto, $g_1(x) = -x + 5$.

Función g_2: la pendiente de g_2 es 1 (¿por qué?), y el intercepto de y es -5 (¿por qué?); por lo tanto, $g_2(x) = x - 5$.

Escribir g como una función a trozos es solo una cuestión de recopilar todos los diferentes "trozos" y los intervalos sobre los que se definen:

$$g(x) = \begin{cases} -x + 5 & x < 5 \\ x - 5 & x \geq 5 \end{cases}.$$

Desafío exploratorio 2

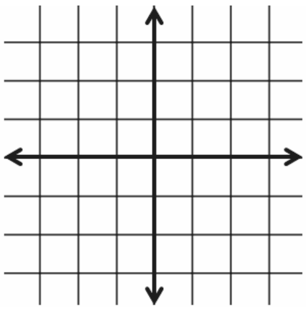
El *piso* de un número real x, que se denota $\lfloor x \rfloor$, es el entero más grande no mayor que x. El *techo* de un número real x, que se denota $\lceil x \rceil$, es el entero más pequeño no menor que x. El número *diente de sierra* de un número positivo es la *parte fraccionaria* del número que está a la derecha de su piso en la recta numérica. En general, para un número real x, el número diente de sierra de x es el valor de la expresión $x - \lfloor x \rfloor$. Se puede considerar cada una de estas expresiones como funciones cuyo dominio es el conjunto de los números reales.

a. Completa la siguiente tabla como ayuda para comprender cómo estas funciones asignan elementos del dominio a los elementos del rango. La primera y la segunda fila ya están hechas.

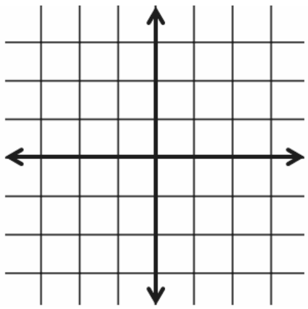
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{piso}(\boldsymbol{x}) = \lfloor \boldsymbol{x} \rfloor$	$\boldsymbol{techox}) = \lceil \boldsymbol{x} \rceil$	$\boldsymbol{diente\ de\ sierra}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \lfloor \boldsymbol{x} \rfloor$
4.8	4	5	0.8
-1.3	-2	-1	0.7
2.2			
6			
-3			
$-\frac{2}{3}$			
π			

b. Crea una gráfica de cada función.

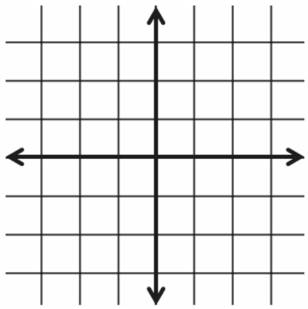
$\boldsymbol{piso}(\boldsymbol{x}) = \lfloor \boldsymbol{x} \rfloor$



$\boldsymbol{techo}(\boldsymbol{x}) = \lceil \boldsymbol{x} \rceil$



$\boldsymbol{diente\ de\ sierra}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \lfloor \boldsymbol{x} \rfloor$



c. Para las funciones piso, techo y diente de sierra, ¿cuáles serían los valores del rango para todos los números reales x en el intervalo $[0,1)$? ¿Y el intervalo $(1,2]$? ¿El intervalo $[-2, -1)$? ¿El intervalo $[1.5, 2.5]$?

Términos importantes

FUNCIÓN LINEAL A TROZOS: dado un número de intervalos que no se superponen en la recta de números reales, una *función lineal a trozos (real)* es una función de la unión de los intervalos al conjunto de números reales de modo tal que la función se define por las funciones lineales (posiblemente diferentes) en cada intervalo.

FUNCIÓN DE VALOR ABSOLUTO: el valor absoluto de un número x, que se denota $|x|$, es la distancia entre 0 y x en la recta numérica. La *función de valor absoluto* es la función lineal a trozos de modo tal que para cada número real x el valor de la función es $|x|$.

Para nombrar la función de valor absoluto, solemos decir "Sea $f(x) = |x|$ para todos los números reales x".

FUNCIÓN PISO: el *piso* de un número real x, que se denota $\lfloor x \rfloor$, es el entero más grande no mayor que x. La *función piso* es la función lineal a trozos de modo tal que para cada número real x, el valor de la función es $\lfloor x \rfloor$.

Para nombrar la función piso, solemos decir "Sea $f(x) = \lfloor x \rfloor$ para todos los números reales x".

FUNCIÓN TECHO: el *techo* de un número real x, que se denota $\lceil x \rceil$, es el entero más pequeño no menor que x. La *función techo* es la función lineal a trozos de modo tal que para cada número real x el valor de la función es $\lceil x \rceil$.

Para nombrar la función techo, solemos decir "Sea $f(x) = \lceil x \rceil$ para todos los números reales x".

FUNCIÓN DIENTE DE SIERRA: la *función diente de sierra* es la función lineal a trozos de modo tal que para cada número real x el valor de la función está dado por la expresión $x - \lfloor x \rfloor$.

La función diente de sierra asigna a cada número positivo la parte del número (la parte no entera) que está a la derecha del piso del número en la recta numérica. Es decir, si $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ para todos los números reales x, entonces $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$, $f\left(1\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$, $f\ (1{,}000.02) = 0.02$, $f\ (-0.3) = 0.7$, etc.

Grupo de problemas

1. Explica por qué la función diente de sierra, *diente de sierra*$(x) = x - \lfloor x \rfloor$ para todos los números reales x, toma solo la parte fraccionaria de un número cuando el número es positivo.

2. Sea $g(x) = \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor$, donde x puede ser cualquier número real. En otras palabras, g es la diferencia entre las funciones techo y piso. Expresa g como una función a trozos.

3. La función de Heaviside se define mediante la siguiente fórmula.

$$H(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

   Representa gráficamente esta función e indica su dominio y su rango.

4. La siguiente función a trozos es un ejemplo de una función escalonada.

$$S(x) = \begin{cases} 3 & -5 \le x < -2 \\ 1 & -2 \le x < 3 \\ 2 & 3 \le x \le 5 \end{cases}$$

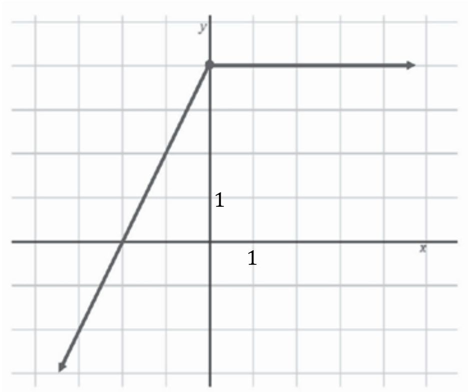
   a. Representa gráficamente esta función e indica el dominio y el rango.
   b. ¿Por qué este tipo de función se llama función escalonada?

5. Sea $f(x) = \frac{|x|}{x}$, donde x puede ser cualquier número real excepto 0.
   a. ¿Por qué el número 0 está excluido del dominio de f?
   b. ¿Cuál es el rango de f?
   c. Crea una gráfica de f.
   d. Expresa f como una función a trozos.
   e. ¿Cuál es la diferencia entre esta función y la función de Heaviside?

6. Representa gráficamente las siguientes funciones a trozos para el dominio que se especifica.
   a. $f(x) = |x + 3|$ para $-5 \le x \le 3$
   b. $f(x) = |2x|$ para $-3 \le x \le 3$
   c. $f(x) = |2x - 5|$ para $0 \le x \le 5$
   d. $f(x) = |3x + 1|$ para $-2 \le x \le 2$
   e. $f(x) = |x| + x$ para $-5 \le x \le 3$
   f. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$
   g. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < -1 \\ 3 - x & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$

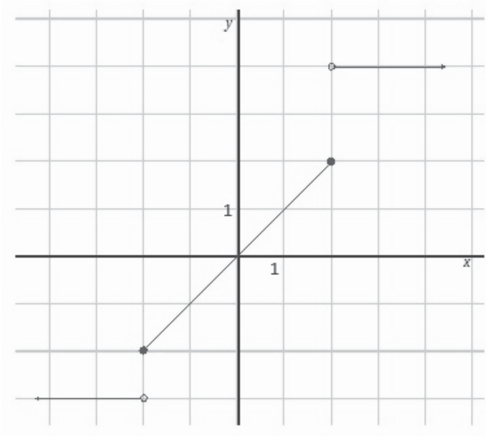
7. Escribe una función a trozos para cada una de las siguientes gráficas.

a.



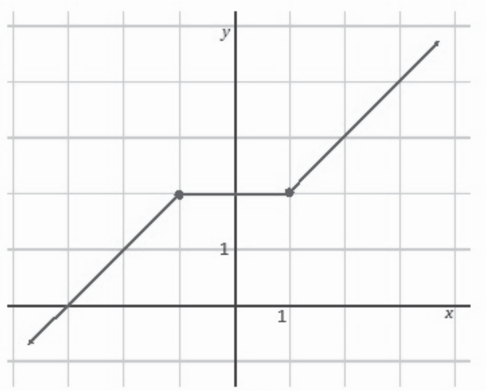
Gráfica de b

b.



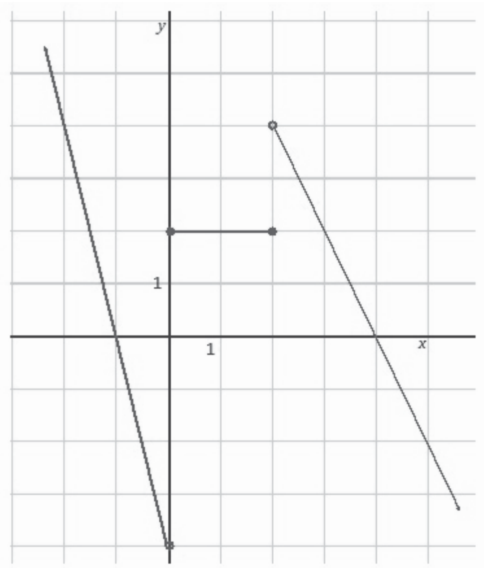
Gráfica de p

c.



Gráfica de k

d.



Gráfica de h

Lección 16: Las gráficas también pueden resolver ecuaciones

Trabajo en clase

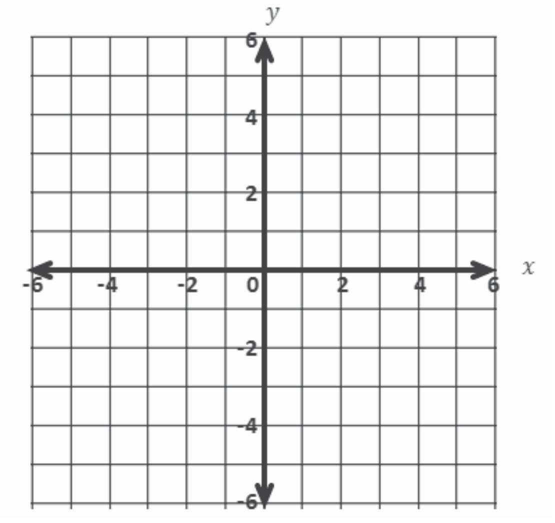
Ejercicio inicial

1. Halla el valor de x en la siguiente ecuación: $|x+2|-3=0.5x+1$.

2. Ahora, sean $f(x)=|x+2|-3$ y $g(x)=0.5\,x+1$.
   ¿Cuándo $f(x)=g(x)$?

   a. Representa gráficamente $y=f(x)$ y $y=g(x)$ en el mismo par de ejes.

   b. ¿Cuándo $f(x)=g(x)$? ¿Cuál es el significado visual de los puntos donde $f(x)=g(x)$?



   c. ¿Es cada punto de intersección (x,y) un elemento de la gráfica de f y un elemento de la gráfica de g? En otras palabras, ¿tienen las funciones f y g realmente el mismo valor cuando $x=4$? ¿Y cuando $x=-4$?

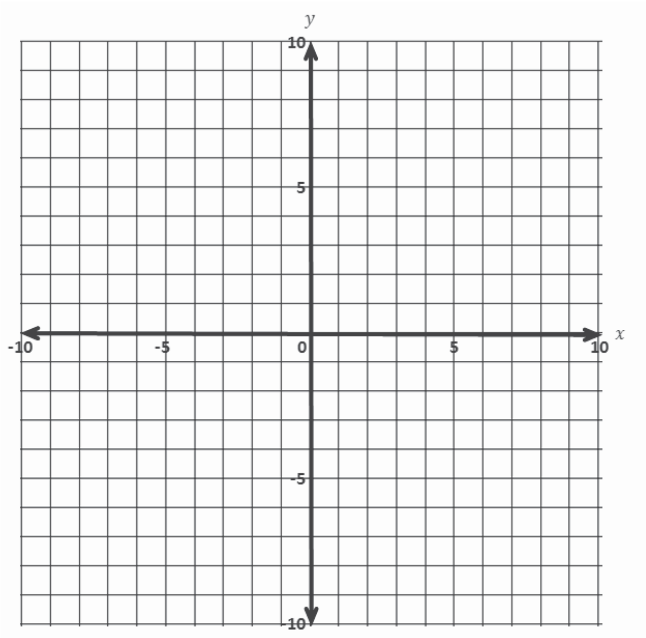
Ejemplo 1

Resuelve esta ecuación representando gráficamente dos funciones en el mismo plano cartesiano: $-|x-3|+4=|0.5x|-5$.

Sea $f(x)=-|x-3|+4$, y sea $g(x)=|0.5x|-5$, donde x puede ser cualquier número real.

Buscamos valores de x en que las funciones f y g tengan el mismo valor de salida.

Por lo tanto, establecemos $y=f(x)$ y $y=g(x)$ para poder trazar las gráficas en el mismo plano de coordenadas:



A partir de la gráfica, vemos que los dos puntos de intersección son ___________ y ______________ .

El hecho de que las gráficas de las funciones se encuentren en estos dos puntos significa que, cuando x es ________________ , tanto $f(x)$ como $g(x)$ son ___________ , o cuando x es ____________ , tanto $f(x)$ como $g(x)$ son ___________ .

Por lo tanto, las expresiones $-|x-3|+4$ y $|0.5x|-5$ son iguales cuando $x=$ _________ o cuando $x=$ ___________ .

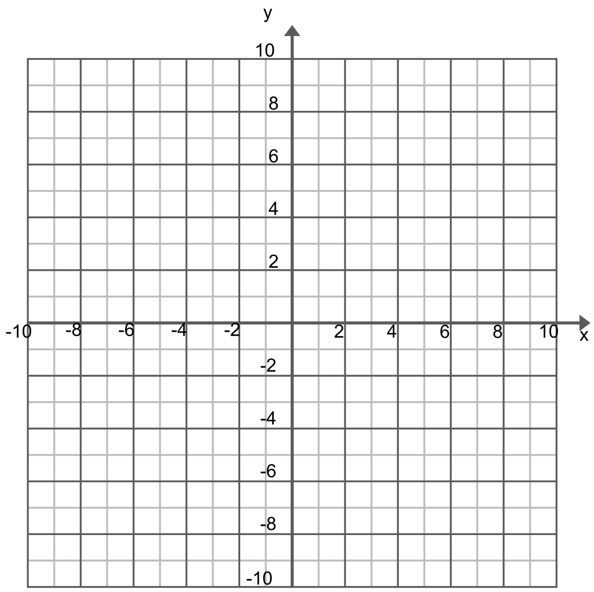
Por lo tanto, el conjunto de soluciones de la ecuación original es _________ .

Ejemplo 2

Resuelve esta ecuación mediante una gráfica: $-|x - 3.5| + 4 = -0.25x - 1$.

a. Escribe dos funciones representadas por cada lado de la ecuación.

b. Representa gráficamente las funciones en un panel de visualización adecuado.



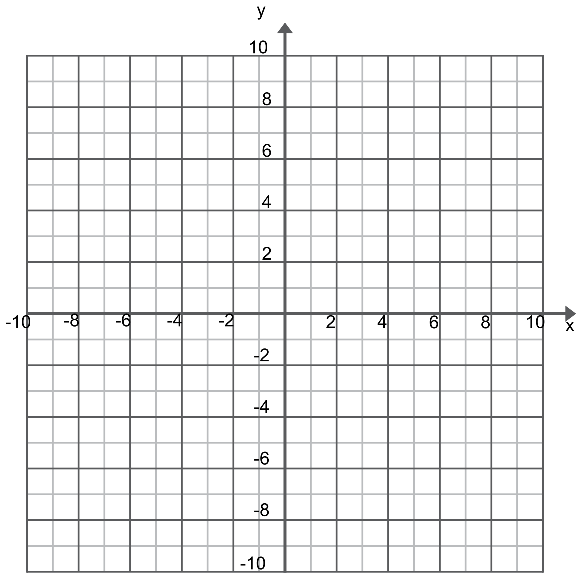
c. Determina los puntos de intersección de las dos funciones.

d. Verifica que las coordenadas x de los puntos de intersección sean soluciones de la ecuación.

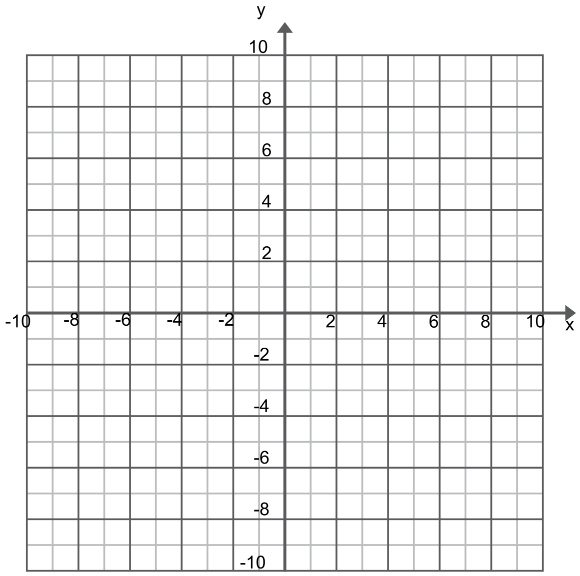
Ejercicios 1 a 5:

Utiliza gráficas para hallar valores aproximados del conjunto de soluciones para cada ecuación. Utiliza tecnología para apoyar tu trabajo. Explica cómo se relaciona cada una de tus soluciones con la gráfica. Comprueba tus soluciones utilizando la ecuación.

1. $3 - 2x = |x - 5|$

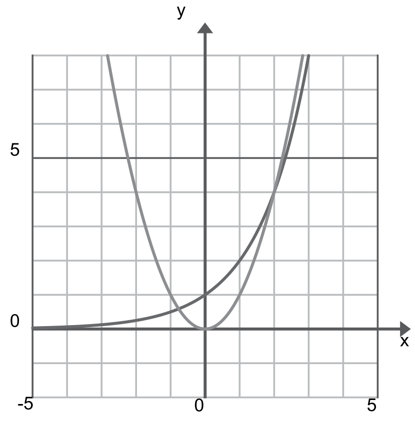


2. $2(1.5)^x = 2 + 1.5x.$



3. Se muestran las gráficas de las funciones f y g.

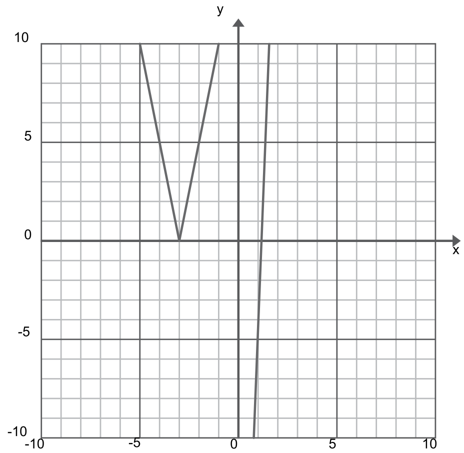
   a. Utiliza las gráficas para *aproximar* la solución o las soluciones a la ecuación $f(x) = g(x)$.



   b. Sea $f(x) = x^2$, y sea $g(x) = 2^x$. Halla *todas* las soluciones de la ecuación $f(x) = g(x)$. Verifica cualquier solución exacta que determines utilizando las definiciones de f y g. Explica cómo llegaste a tus soluciones.

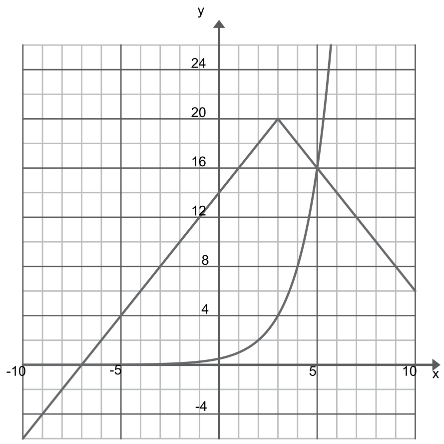
4. Las gráficas de f, una función en la que se toma un valor absoluto, y g, una función lineal, se muestran a la derecha. Ambas funciones se definen sobre todos los valores reales para x. Tami llegó a la conclusión de que la ecuación $f(x) = g(x)$ no tiene solución.

   ¿Estás de acuerdo o en desacuerdo? Explica tu razonamiento.



5. Las gráficas de f (una función en la que se toma el valor absoluto) y g (una función exponencial) se muestran a continuación. Sharon dijo que el conjunto de soluciones de la ecuación $f(x) = g(x)$ es exactamente $\{-7,5\}$.

   ¿Estás de acuerdo o en desacuerdo con Sharon? Explica tu razonamiento.



Grupo de problemas

1. Resuelve las siguientes ecuaciones mediante una gráfica. Verifica los conjuntos de soluciones utilizando las ecuaciones originales.

   a. $|x| = x^2$

   b. $|3x - 4| = 5 - |x - 2|$

2. Halla la solución o las soluciones aproximadas de cada una de las siguientes ecuaciones mediante una gráfica. Utiliza tecnología para apoyar tu trabajo. Verifica los conjuntos de soluciones utilizando las ecuaciones originales.

   a. $2x - 4 = \sqrt{x + 5}$

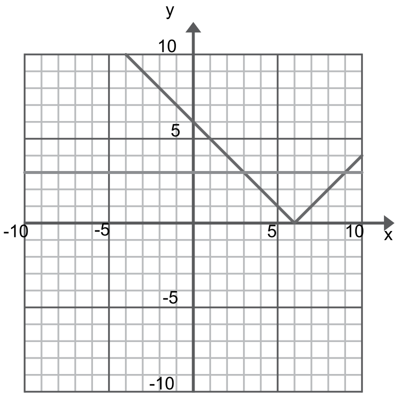
   b. $x + 2 = x^3 - 2x - 4$

   c. $0.5x^3 - 4 = 3x + 1$

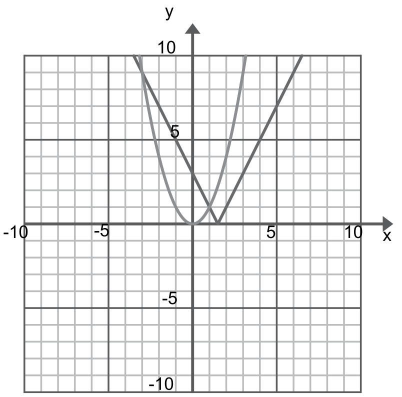
   d. $6\left(\frac{1}{2}\right)^{5x} = 10 - 6x$

En cada problema, las gráficas de las funciones f y g se muestran en el mismo plano cartesiano. Calcula aproximadamente el conjunto de soluciones de la ecuación $f(x) = g(x)$. Supón que las gráficas de las dos funciones se intersecan solo en los puntos que se muestran en la gráfica.

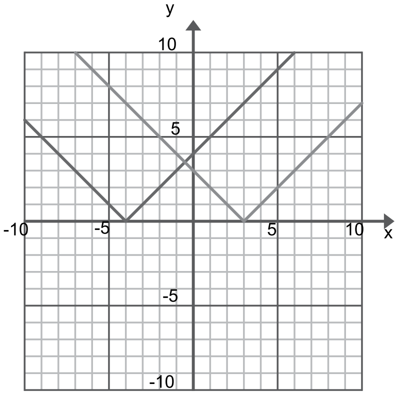
3.



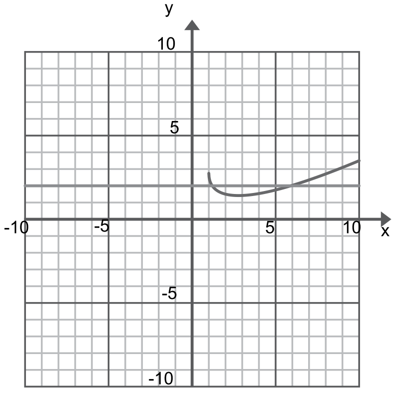
4.



5.

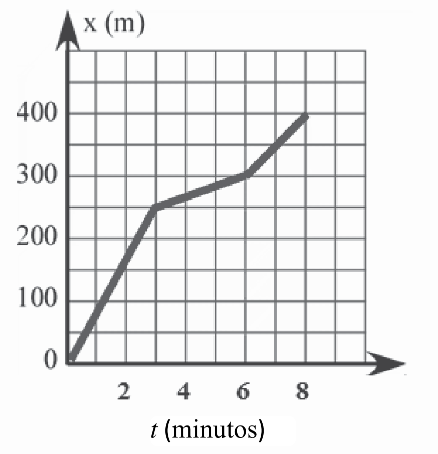


6.



EUREKA MATH

7. En la gráfica, se muestra la distancia que Glenn recorre en bicicleta desde su casa hasta la escuela, que queda en la misma calle. Su vecino Pablo, que vive 100 m más cerca de la escuela, sale de su casa al mismo tiempo que Glenn. Camina a una velocidad constante, y ambos llegan a la escuela al mismo tiempo.



   a. Representa gráficamente una función lineal que represente la distancia a la que está Pablo de la casa de Glenn como una función del tiempo.
   b. Calcula aproximadamente cuándo se cruzan los dos niños.
   c. Escribe funciones lineales a trozos para representar la distancia de cada niño y utilízalas para verificar tu respuesta a la parte (b).

Esta página queda en blanco intencionalmente.

Lección 17: Cuatro transformaciones interesantes de las funciones

Trabajo en clase

Desafío exploratorio 1

Sean $f(x) = |x|$, $g(x) = f(x) - 3$ y $h(x) = f(x) + 2$ para cualquier número real x.

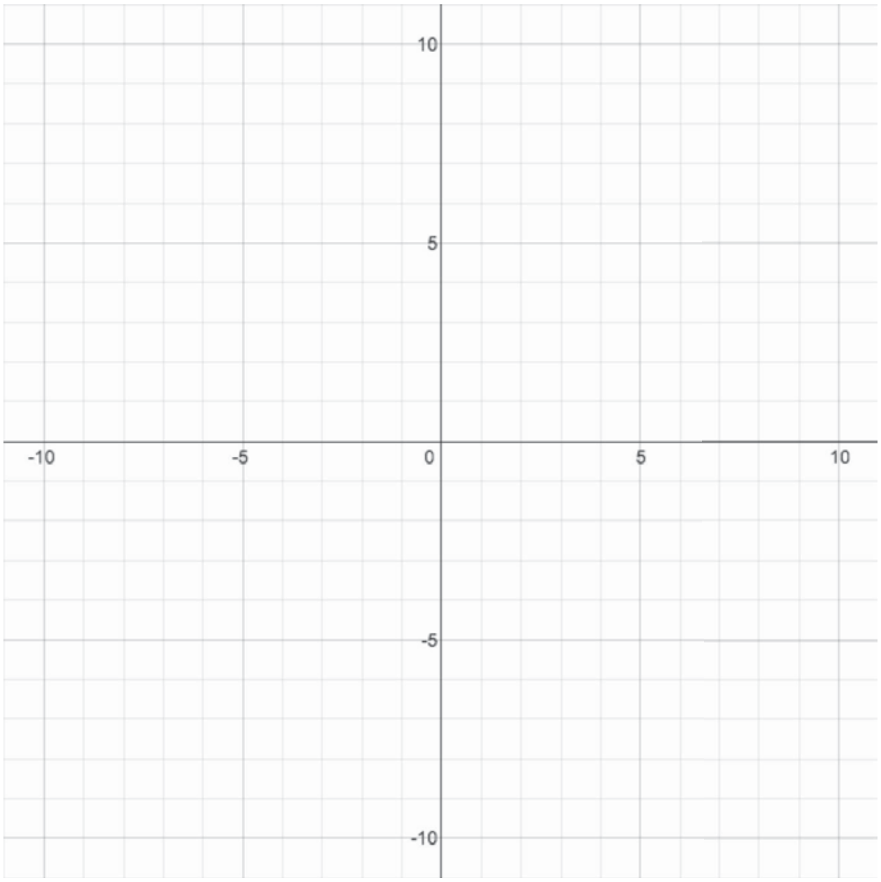
a. Escribe una fórmula explícita para $g(x)$ en términos de $|x|$ (es decir, sin utilizar la notación $f(x)$).

b. Escribe una fórmula explícita para $h(x)$ en términos de $|x|$ (es decir, sin utilizar la notación $f(x)$).

c. Completa la tabla de valores para estas funciones.

x	$f(x) = \|x\|$	$g(x) = f(x) - 3$	$h(x) = f(x) + 2$
-3			
-2			
-1			
0			
1			
2			
3			

d. Representa gráficamente las tres ecuaciones: $y = f(x)$, $y = f(x) - 3$ y $y = f(x) + 2$.



e. ¿Cuál es la relación entre la gráfica de $y = f(x)$ y la gráfica de $y = f(x) + k$?

f. ¿Cómo se relacionan los valores de g y h con los valores de f?

EUREKA MATH

Desafío exploratorio 2

Sean $f(x) = |x|$, $g(x) = 2f(x)$ y $h(x) = \frac{1}{2}f(x)$ para cualquier número real x.

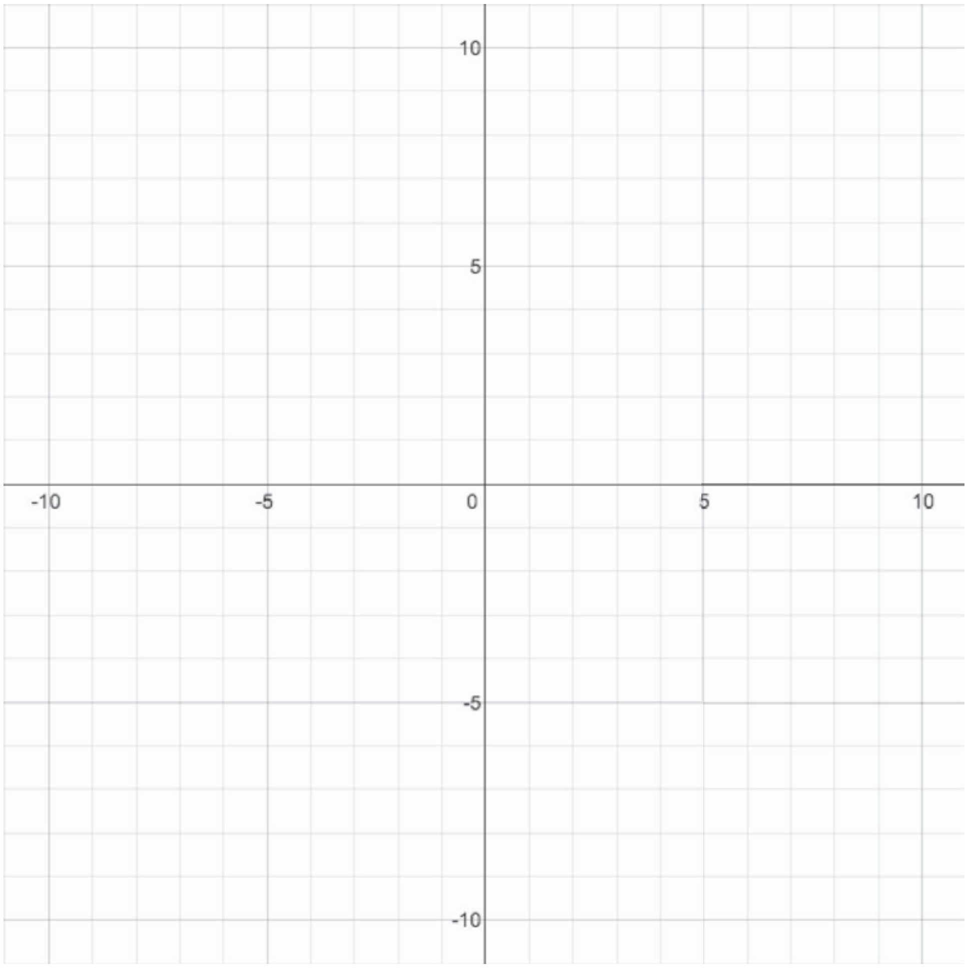
a. Escribe una fórmula para $g(x)$ en términos de $|x|$ (es decir, sin utilizar la notación $f(x)$).

b. Escribe una fórmula para $h(x)$ en términos de $|x|$ (es decir, sin utilizar la notación $f(x)$).

c. Completa la tabla de valores para estas funciones.

x	$f(x) = |x|$	$g(x) = 2f(x)$	$h(x) = \frac{1}{2}f(x)$
-3			
-2			
-1			
0			
1			
2			
3			

d. Representa gráficamente las tres ecuaciones: $y = f(x)$, $y = 2f(x)$ y $y = \frac{1}{2}f(x)$.



Dado $f(x) = |x|$, sean $p(x) = -|x|$, $q(x) = -2f(x)$ y $r(x) = -\frac{1}{2}f(x)$ para cualquier número real x.

e. Escribe la fórmula para $q(x)$ en términos de $|x|$ (es decir, sin utilizar la notación $f(x)$).

f. Escribe la fórmula para $r(x)$ en términos de $|x|$ (es decir, sin utilizar la notación $f(x)$).

g. Completa la tabla de valores para las funciones $p(x) = -|x|$, $q(x) = -2f(x)$ y $r(x) = -\frac{1}{2}f(x)$.

x	$p(x) = -\lvert x\rvert$	$q(x) = -2f(x)$	$r(x) = -\frac{1}{2}f(x)$
-3			
-2			
-1			
0			
1			
2			
3			

h. Representa gráficamente las tres funciones en la misma gráfica que se creó en la parte (d). Identifica las gráficas como $y = p(x)$, $y = q(x)$ y $y = r(x)$.

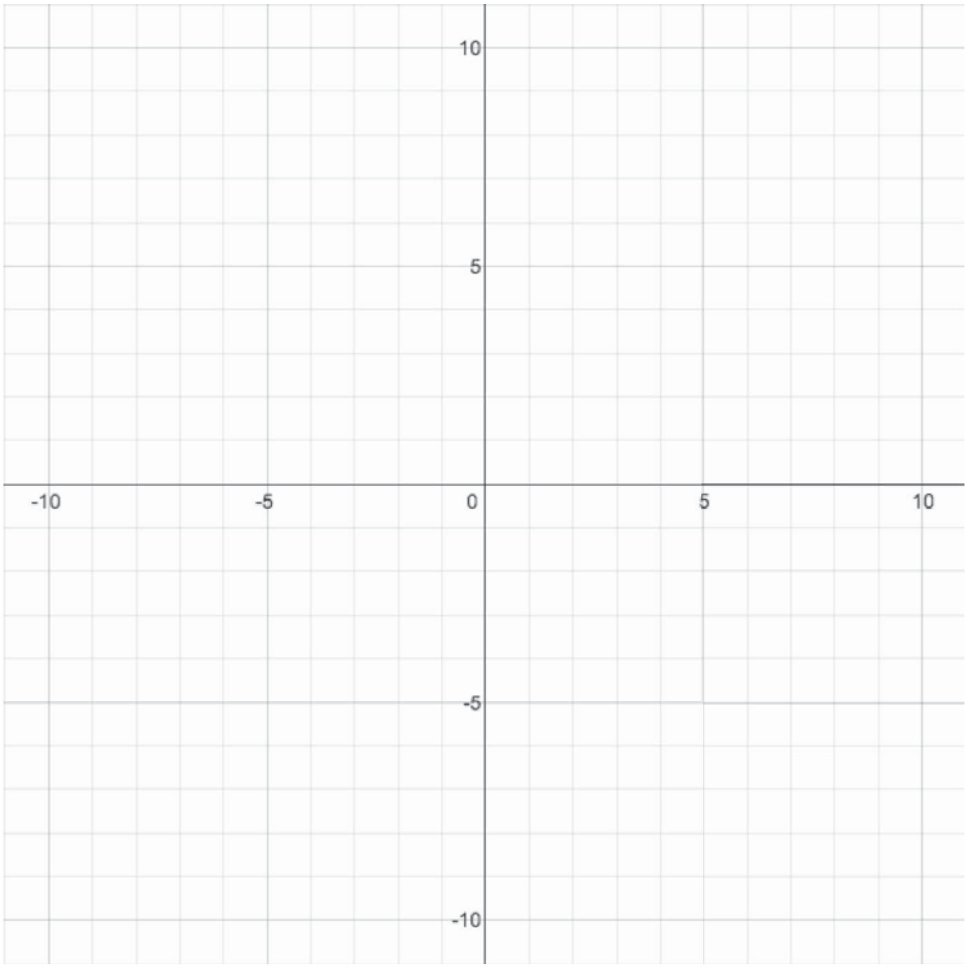
i. ¿Cómo se relaciona la gráfica de $y = f(x)$ con la gráfica de $y = kf(x)$ cuando $k > 1$?

j. ¿Cómo se relaciona la gráfica de $y = f(x)$ con la gráfica de $y = kf(x)$ cuando $0 < k < 1$?

k. ¿Cómo se relacionan los valores de las funciones p, q y r con los valores de las funciones f, g y h, respectivamente? ¿Qué transformación de las gráficas de f, g y h representa esta relación?

Ejercicio

Crea tu propia función f y traza la gráfica en el siguiente plano cartesiano. Identifícala como la gráfica de la ecuación $y = f(x)$. Si $b(x) = f(x) - 4$ y $c(x) = \frac{1}{4} f(x)$ para cada número real x, representa gráficamente las ecuaciones $y = b(x)$ y $y = c(x)$ en el mismo plano cartesiano.



Grupo de problemas

Sea $f(x) = |x|$ para cada número real x. A continuación se muestra la gráfica de $y = f(x)$. Describe cómo la gráfica para cada una de las siguientes funciones es una transformación de la gráfica de $y = f(x)$. Luego, usa este mismo par de ejes para representar gráficamente cada función de los Problemas 1 a 5. Asegúrate de identificar cada función de tu gráfica (como $y = a(x)$, $y = b(x)$, etc.).

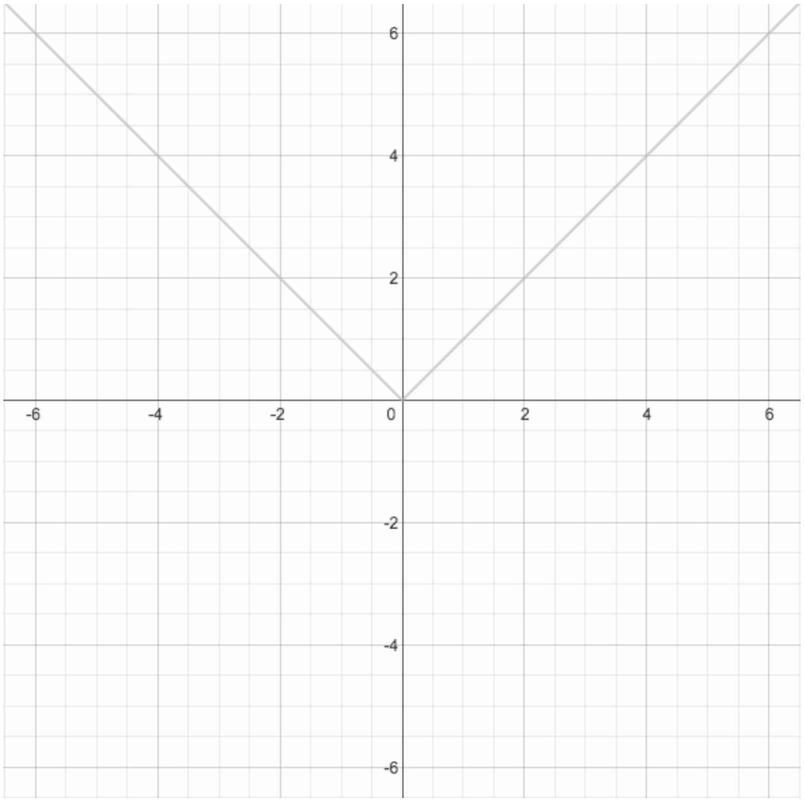
1. $a(x) = |x| + \frac{3}{2}$

2. $b(x) = -|x|$

3. $c(x) = 2|x|$

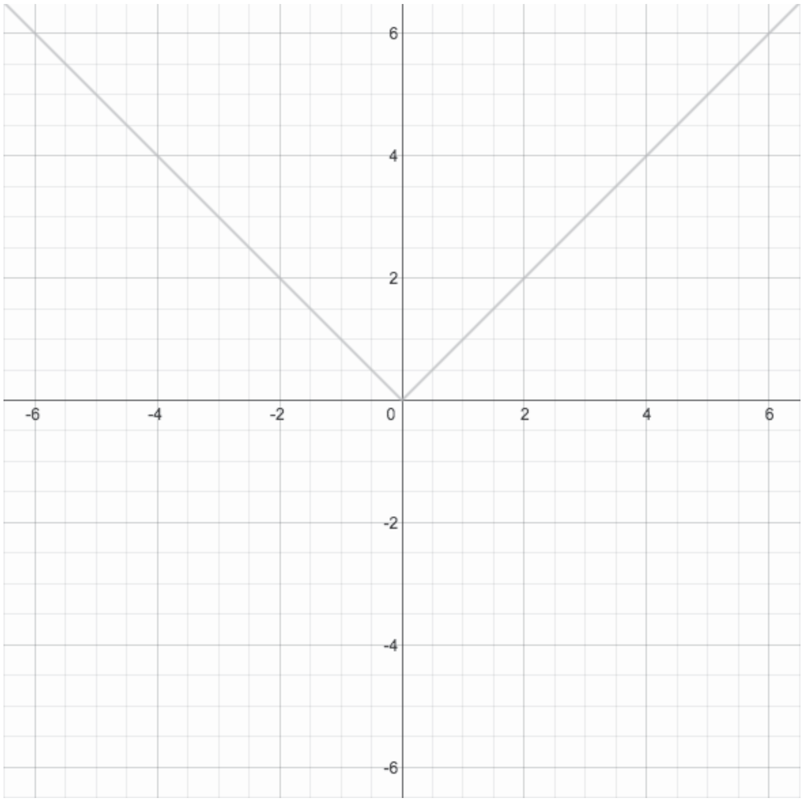
4. $d(x) = \frac{1}{3}|x|$

5. $e(x) = |x| - 3$

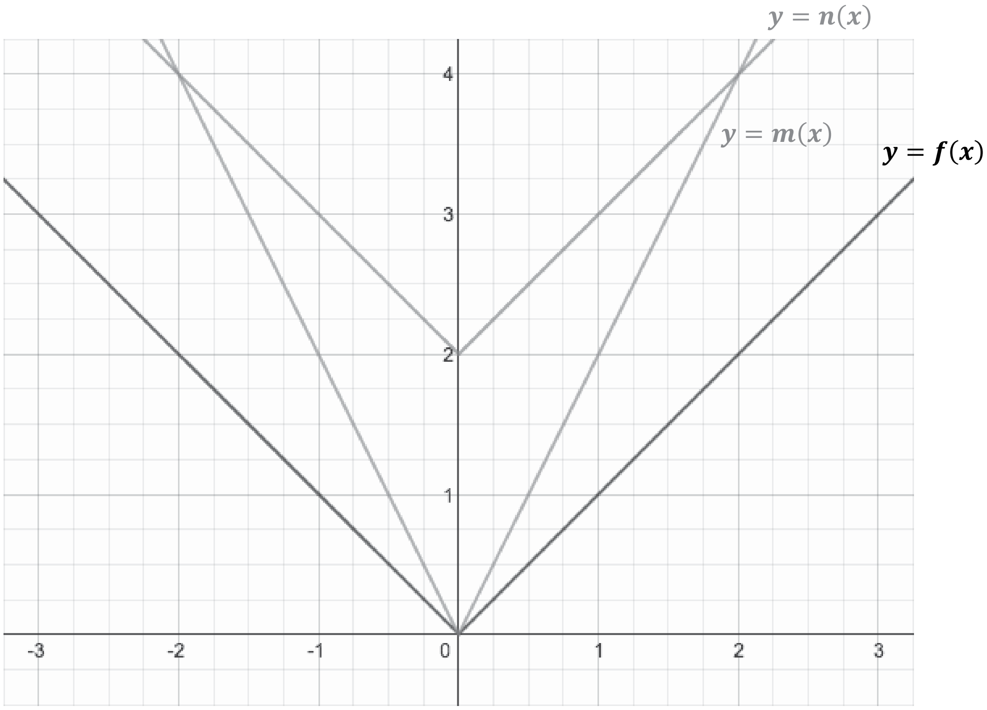


6. Sean $r(x) = |x|$ y $t(x) = -2|x| + 1$ para cada número real x. A continuación se muestra la gráfica de $y = r(x)$. Completa la siguiente tabla para generar valores de salida para la función t y luego representa gráficamente la ecuación $y = t(x)$ en el mismo par de ejes que la gráfica de $y = r(x)$.

x	$r(x) = \|x\|$	$t(x) = -2\|x\| + 1$
-2		
-1		
0		
1		
2		



7. Sea $f(x) = |x|$ para cada número real x. Sean m y n funciones que se hallan mediante la transformación de la gráfica de $y = f(x)$. Utiliza las gráficas de $y = f(x)$, $y = m(x)$ y $y = n(x)$ que se encuentran a continuación para escribir las funciones m y n en términos de la función f. (Pista: ¿cuál es el valor de k?).



Esta página queda en blanco intencionalmente.

Lección 18: Cuatro transformaciones interesantes de las funciones

Trabajo en clase

Ejemplo

Sean $f(x) = |x|$, $g(x) = f(x-3)$ y $h(x) = f(x+2)$, donde x puede ser cualquier número real.

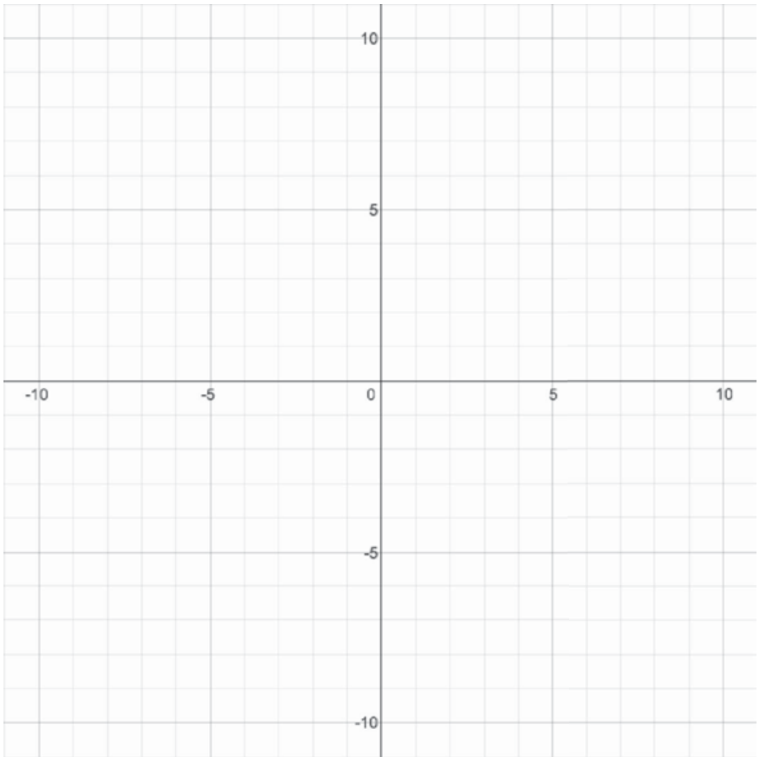
a. Escribe la fórmula para $g(x)$ en términos de $|x|$ (es decir, sin utilizar la notación $f(x)$).

b. Escribe la fórmula para $h(x)$ en términos de $|x|$ (es decir, sin utilizar la notación $f(x)$).

c. Completa la tabla de valores para estas funciones.

x	$f(x) = \|x\|$	$g(x) =$	$h(x) =$
-3			
-2			
-1			
0			
1			
2			
3			

d. Representa gráficamente las tres ecuaciones: $y = f(x)$, $y = f(x - 3)$ y $y = f(x + 2)$.



e. ¿Cómo se relaciona la gráfica de $y = f(x)$ con la gráfica de $y = f(x - 3)$?

f. ¿Cómo se relaciona la gráfica de $y = f(x)$ con la gráfica de $y = f(x + 2)$?

g. ¿De qué maneras diferentes se relacionan las gráficas de $y = |x| - 3$ y $y = |x - 3|$ con la gráfica de $y = |x|$?

h. ¿Cómo se relacionan los valores de g y h con los valores de f?

Ejercicios

1. Karla e Isamar no están de acuerdo en la manera en que la gráfica de la función $g(x) = |x + 3|$ se traslada en relación con la gráfica de $f(x) = |x|$. Karla cree que la gráfica de g está "a la derecha" de la gráfica de f; Isamar cree que la gráfica está "a la izquierda". ¿Quién tiene razón? Utiliza las coordenadas del vértice de f y g para apoyar tu explicación.

2. Sea $f(x) = |x|$, donde x puede ser cualquier número real. Escribe una fórmula para la función cuya gráfica sea la transformación de la gráfica de f dada según las siguientes instrucciones.

   a. Una traslación de 5 unidades hacia la derecha

   b. Una traslación de 3 unidades hacia abajo

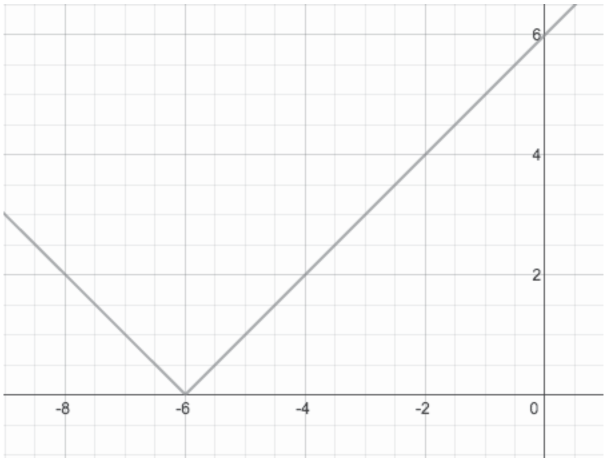
   c. Una escala vertical (un estiramiento vertical) con un factor de escala de 5

   d. Una traslación de 4 unidades hacia la izquierda

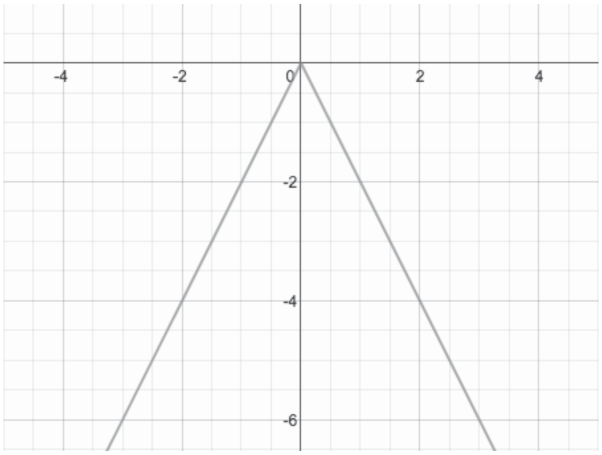
   e. Una escala vertical (una compresión vertical) con un factor de escala de $\frac{1}{3}$

3. Escribe la fórmula para la función que se representa en la gráfica.

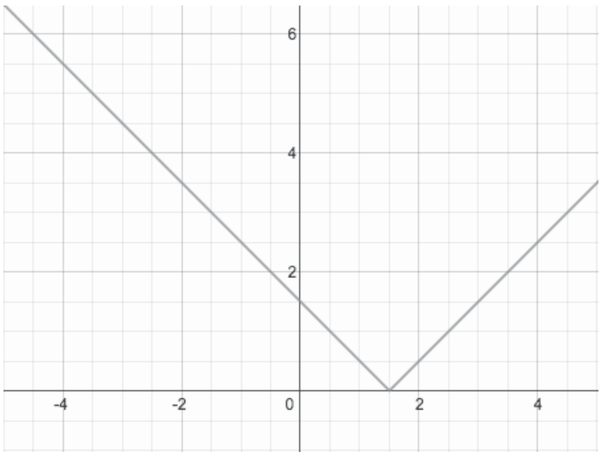
a. $y =$



b. $y =$

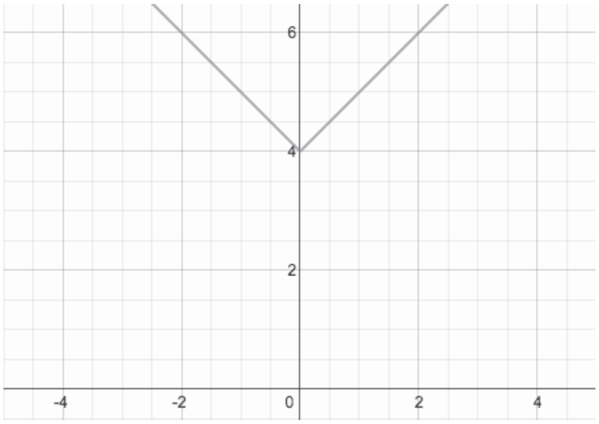


c. $y =$

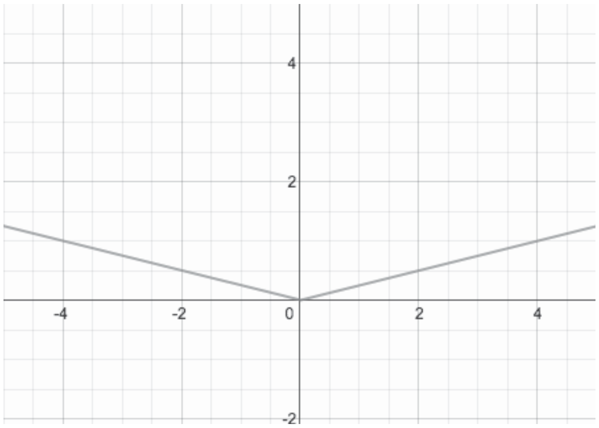


EUREKA MATH

d. $y =$



e. $y =$



4. Sea $f(x) = |x|$, donde x puede ser cualquier número real. Escribe una fórmula para la función cuya gráfica es la transformación descrita de la gráfica de f.

   a. Una traslación de 2 unidades hacia la izquierda y 4 unidades hacia abajo

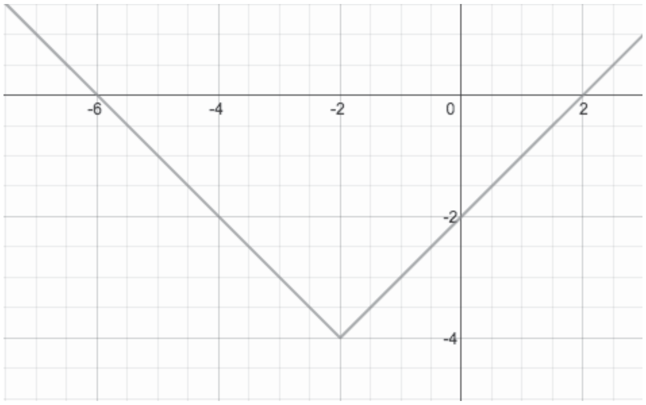
   b. Una traslación de 2.5 unidades hacia la derecha y 1 unidad hacia arriba

   c. Una escala vertical con un factor de escala de $\frac{1}{2}$ y luego una traslación de 3 unidades hacia la derecha

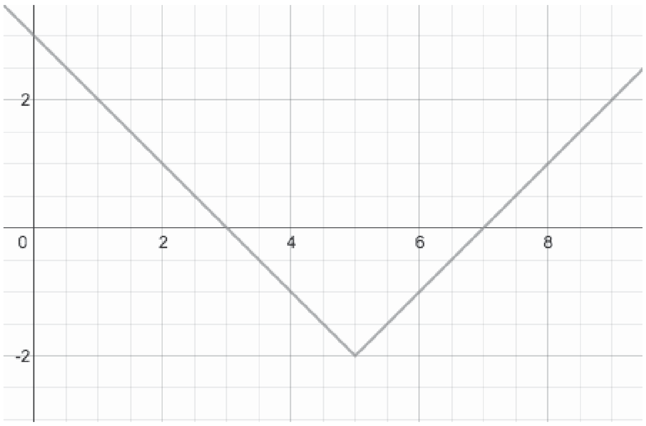
d. Una traslación de 5 unidades hacia la derecha y una escala vertical con una reflexión al otro lado del eje x con un factor de escala vertical de -2

5. Escribe la fórmula para la función que se representa en la gráfica.

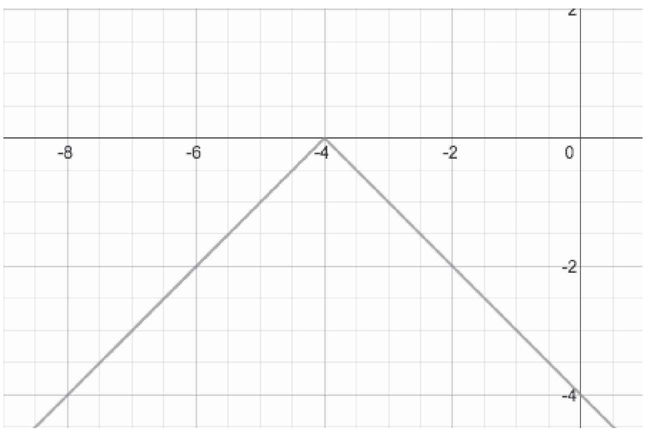
a. $y =$



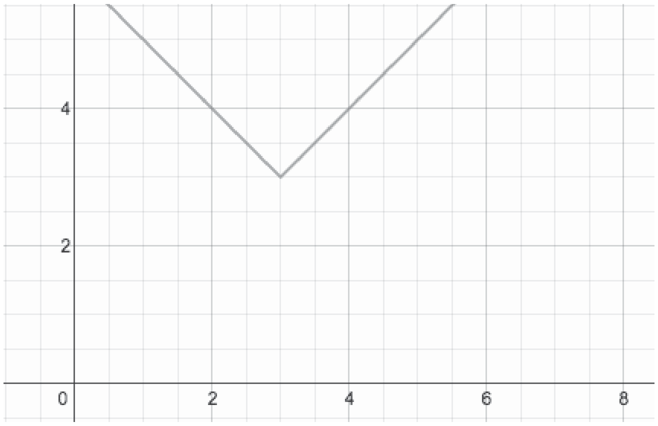
b. $y =$



c. $y =$



d. $y =$



Grupo de problemas

1. Trabajar con funciones cuadráticas:

   a. El vértice de la función cuadrática $f(x) = x^2$ está en $(0,0)$, que es el mínimo para la gráfica de f. En función de lo trabajado en esta lección, ¿hacia dónde predices que se trasladará el vértice en las gráficas de $g(x) = (x-2)^2$ y $h(x) = (x+3)^2$?

   b. Completa la tabla de valores y luego representa gráficamente las tres funciones.

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = (x-2)^2$	$h(x) = (x+3)^2$
-3			
-2			
-1			
0			
1			
2			
3			

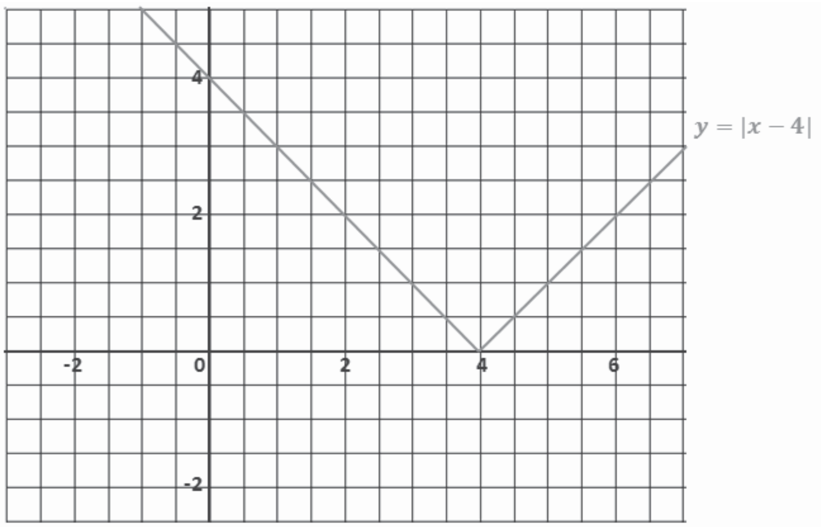
2. Sea $f(x) = |x-4|$ para cada número real x. En el siguiente plano cartesiano, se proporciona la gráfica de la ecuación $y = f(x)$. A continuación se describen las transformaciones de la gráfica de $y = f(x)$. Después de cada descripción, escribe la ecuación para la gráfica transformada. Luego, dibuja la gráfica de la ecuación que escribas en la parte (d).

   a. Traslada la gráfica 6 unidades hacia la izquierda y 2 unidades hacia abajo.

   b. Refleja la gráfica resultante de la parte (a) al otro lado del eje x.

   c. Realiza una escala vertical de la gráfica resultante de la parte (b) con un factor de escala de $\frac{1}{2}$.

   d. Traslada la gráfica resultante de la parte (c) 3 unidades hacia la derecha y 2 unidades hacia arriba. Representa en una gráfica la ecuación resultante.



3. Sea $f(x) = |x|$ para todos los números reales x. Escribe la fórmula para la función que representa la transformación descrita de la gráfica de $y = f(x)$.

   a. Se realiza primero un estiramiento vertical con un factor de escala de $\frac{1}{3}$, luego una traslación de 3 unidades hacia la derecha y, por último, una traslación de 1 unidad hacia abajo.

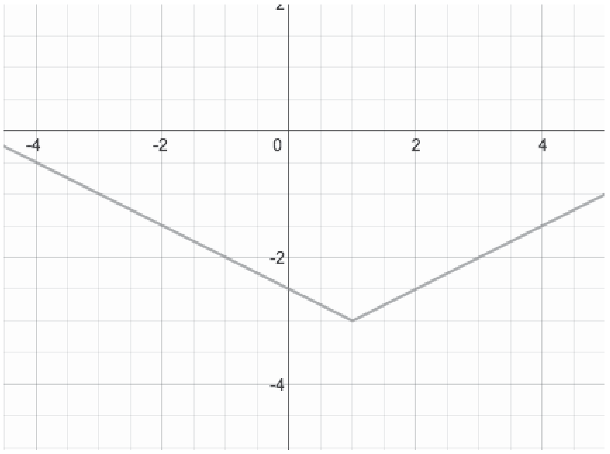
   b. Se realiza primero un estiramiento vertical con un factor de escala de 3, luego una reflexión sobre el eje x, luego una traslación de 4 unidades hacia la izquierda y, por último, una traslación de 5 unidades hacia arriba.

   c. Se realiza primero una reflexión al otro lado del eje x, luego una traslación de 4 unidades hacia la izquierda, luego una traslación de 5 unidades hacia arriba y, por último, un estiramiento vertical con un factor de escala de 3.

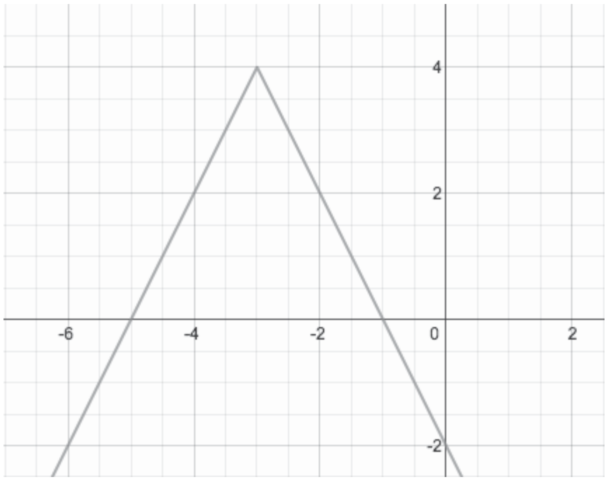
   d. Compara tus respuestas con las partes (b) y (c). ¿Por qué son diferentes?

4. Escribe la fórmula para la función que se representa en cada gráfica.

   a. $a(x) =$



   b. $b(x) =$



Esta página queda en blanco intencionalmente.

Lección 19: Cuatro transformaciones interesantes de las funciones

Trabajo en clase

Desafío exploratorio 1

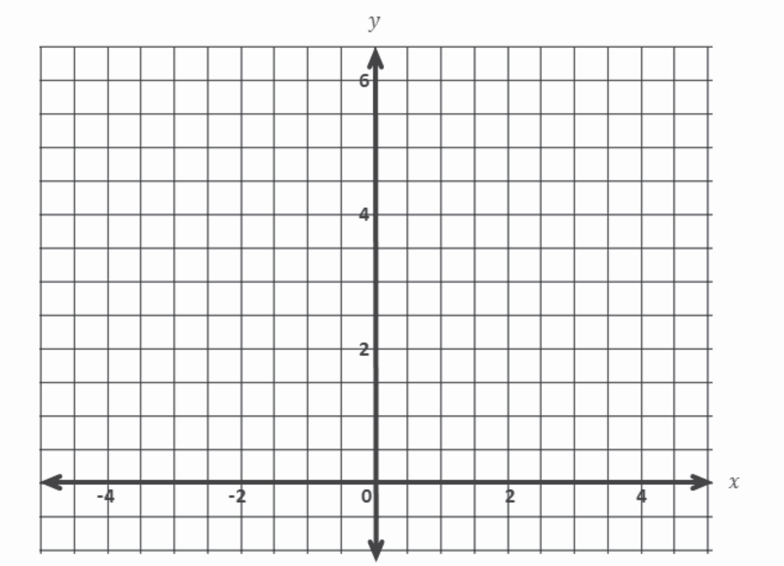
Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = f(2x)$, donde x puede ser cualquier número real.

a. Escribe la fórmula para g en términos de x^2 (es decir, sin utilizar la notación $f(x)$).

b. Completa la tabla de valores para estas funciones.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = x^2}$	$\boldsymbol{g(x) = f(2x)}$
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

c. Representa en una gráfica estas dos ecuaciones: $y = f(x)$ y $y = f(2x)$.



d. ¿Cómo se relaciona la gráfica de $y = g(x)$ con la gráfica de $y = f(x)$?

e. ¿Cómo se relacionan los valores de f con los valores de g?

Desafío exploratorio 2

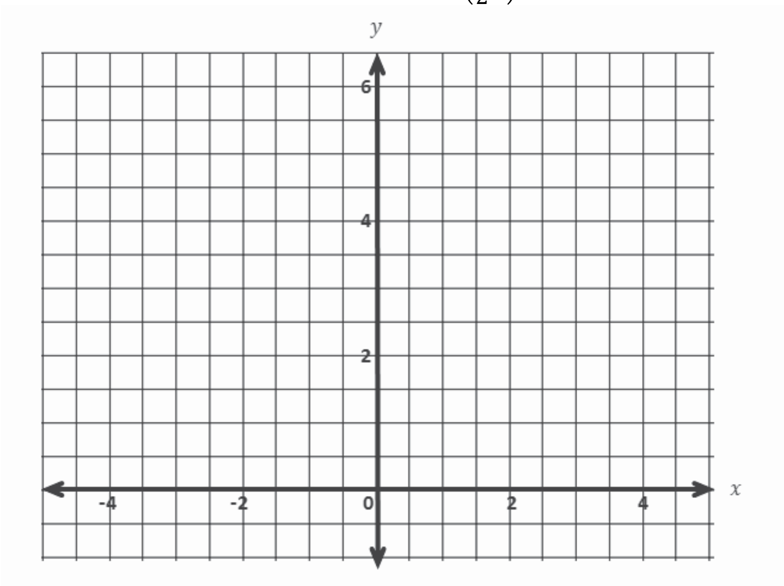
Sean $f(x) = x^2$ y $h(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$, donde x puede ser cualquier número real.

a. Reescribe la fórmula para h en términos de x^2 (es decir, sin utilizar la notación $f(x)$).

b. Completa la tabla de valores para estas funciones.

x	$f(x) = x^2$	$h(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

c. Representa en una gráfica estas dos ecuaciones: $y = f(x)$ y $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.



d. ¿Cómo se relaciona la gráfica de $y = f(x)$ con la gráfica de $y = h\,(x)$?

e. ¿Cómo se relacionan los valores de f con los valores de h?

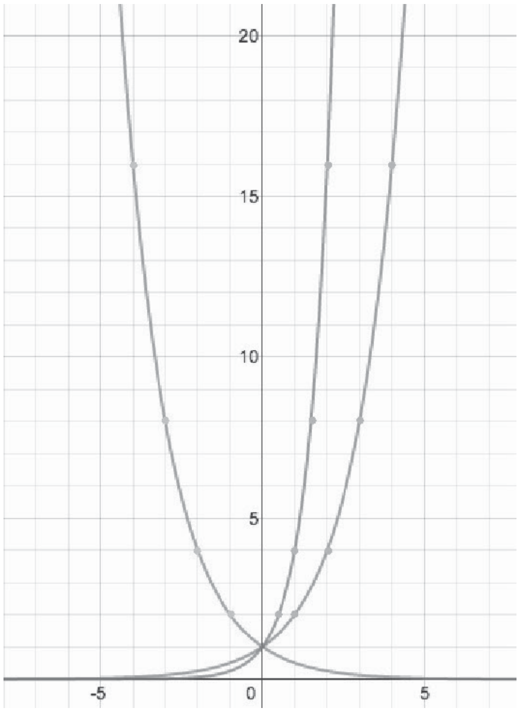
Ejercicio

Completa la tabla de valores para las funciones dadas.

a.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = 2^x}$	$\boldsymbol{g(x) = 2^{(2x)}}$	$\boldsymbol{h(x) = 2^{(-x)}}$
-2			
-1			
0			
1			
2			

b. Identifica cada una de las gráficas con las funciones correctas de la tabla.



c. Describe la transformación que desplaza la gráfica de $y = f(x)$ a la gráfica de $y = g(x)$.

d. Considera $y = f(x)$ y $y = h(x)$. Si se negara la entrada, ¿qué pasaría en la gráfica de f?

e. Escribe la fórmula de una función exponencial cuya gráfica sería un estiramiento horizontal relativo a la gráfica de g.

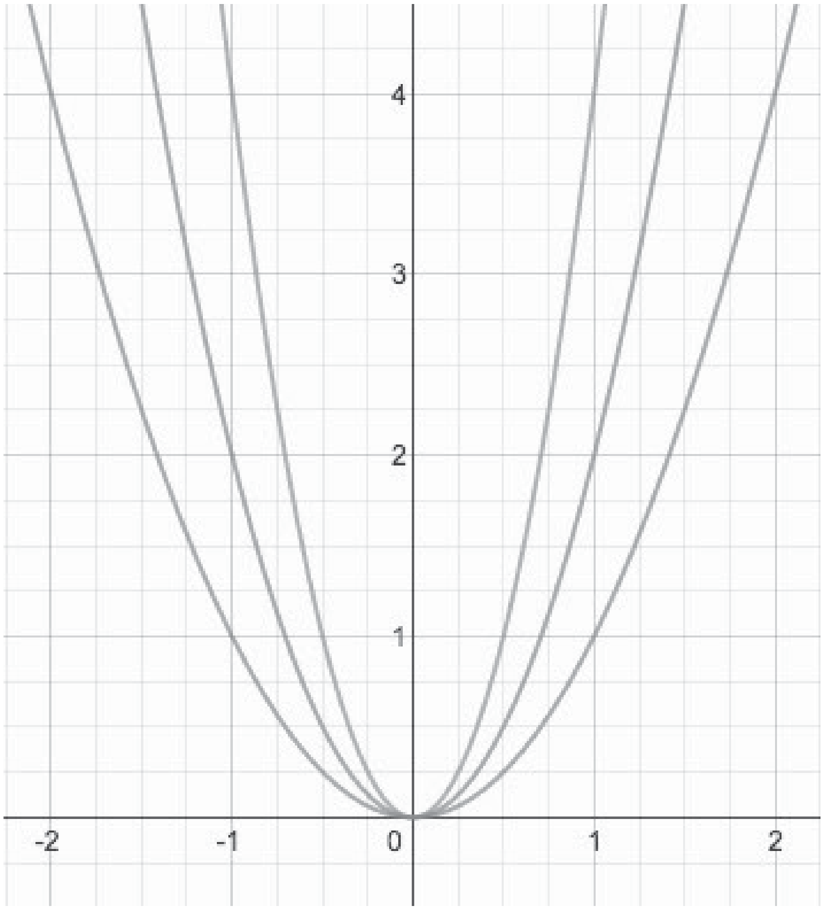
Desafío exploratorio 3

a. Vuelve a observar la gráfica de $y = f(x)$ para la función $f(x) = x^2$ en el Desafío exploratorio 1. ¿Notaríamos alguna diferencia en la gráfica de $y = g(x)$ si se utilizara un factor de escala de -2 en lugar de uno de 2? De ser así, describe la diferencia. De lo contrario, explica por qué no.

b. Una reflexión al otro lado del eje y desplaza la gráfica de $y = f(x)$ para la función $f(x) = x^2$ de vuelta a sí misma. Tal transformación se denomina *simetría de reflexión*. ¿Cuál es la ecuación para la gráfica de la simetría de reflexión de la gráfica de $y = f(x)$?

c. Dado que hallar la respuesta a la siguiente pregunta puede resultar bastante complejo, haz esto solo si tienes tiempo. En las Lecciones 17 y 18, utilizamos la función $f(x) = |x|$ para examinar los efectos gráficos de las transformaciones de una función. En esta lección, utilizamos la función $f(x) = x^2$ para examinar los efectos gráficos de las transformaciones de una función. Según las observaciones que hiciste mientras trabajabas en las gráficas, ¿por qué utilizar la función $f(x) = x^2$ sería una mejor opción que utilizar la función $f(x) = |x|$?

Grupo de problemas



Sean $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$ y $h(x) = (2x)^2$, donde x puede ser cualquier número real. Las gráficas anteriores representan las funciones $y = f(x)$, $y = g(x)$ y $y = h(x)$.

1. Identifica cada gráfica con la ecuación adecuada.

2. Describe la transformación que desplaza la gráfica de $y = f(x)$ a la gráfica de $y = g(x)$. Utiliza las coordenadas para ilustrar un ejemplo de la correspondencia.

3. Describe la transformación que desplaza la gráfica de $y = f(x)$ a la gráfica de $y = h(x)$. Utiliza las coordenadas para ilustrar un ejemplo de la correspondencia.

Lección 20: Cuatro transformaciones interesantes de las funciones

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

Completa los espacios en blanco de la tabla con el encabezado o la información descriptiva adecuada.

<table>
<tr><th>Gráfica de $\boldsymbol{y = f(x)}$</th><th colspan="3">Vertical</th><th colspan="3">Horizontal</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Trasladar</td><td rowspan="2">$y = f(x) + k$</td><td>$k > 0$</td><td>Trasladar hacia arriba $|k|$ unidades</td><td rowspan="2"></td><td>$k > 0$</td><td>Trasladar hacia la derecha $|k|$ unidades</td></tr>
<tr><td></td><td>Trasladar hacia abajo $|k|$ unidades</td><td>$k < 0$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">Ajustar la escala por el factor de escala k</td><td rowspan="4"></td><td>$k > 1$</td><td></td><td rowspan="4">$y = f\left(\frac{1}{k}x\right)$</td><td></td><td>Estiramiento horizontal por un factor de $|k|$</td></tr>
<tr><td>$0 < k < 1$</td><td>Compresión vertical por un factor de $|k|$</td><td>$0 < k < 1$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Compresión vertical por un factor de $|k|$ y una reflexión sobre el eje x</td><td>$-1 < k < 0$</td><td>Compresión horizontal por un factor de $|k|$ y una reflexión al otro lado del eje y</td></tr>
<tr><td>$k < -1$</td><td></td><td>$k < -1$</td><td>Estiramiento horizontal por un factor de $|k|$ y una reflexión sobre el eje y</td></tr>
</table>

Desafío exploratorio 1

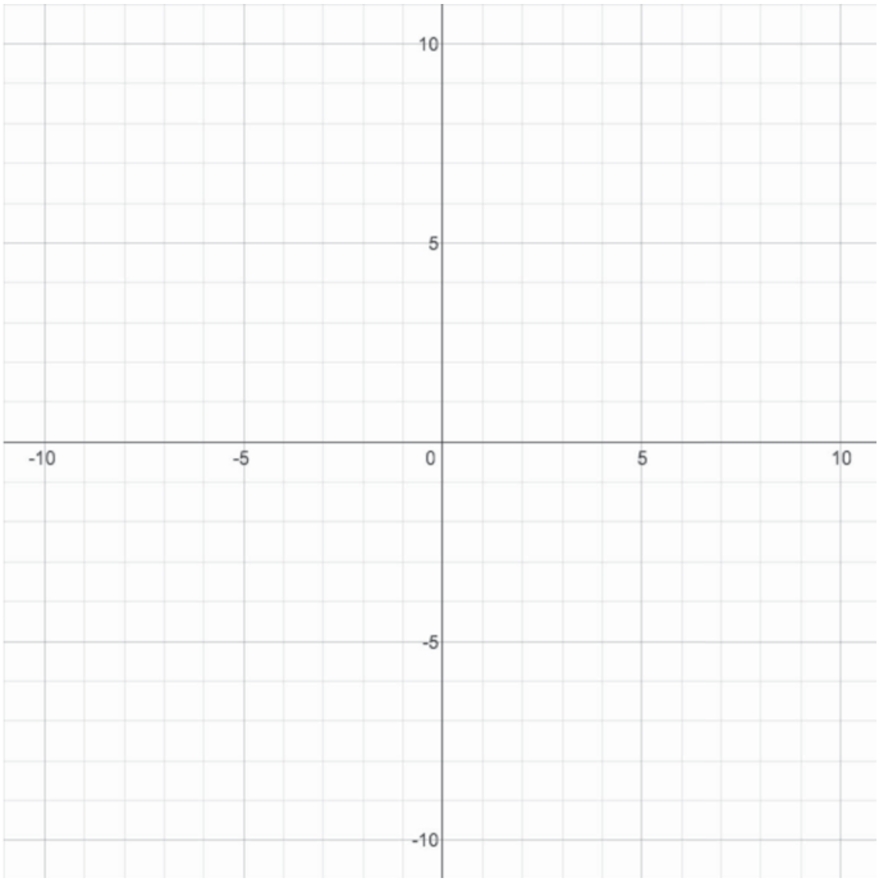
Una transformación de la función de valor absoluto $f(x) = |x - 3|$ se reescribe aquí como una función a trozos. Describe en palabras cómo representar esta función a trozos en una gráfica.

$$f(x) = \begin{cases} -x+3, & x < 3 \\ x-3, & x \geq 3 \end{cases}$$

Ejercicios 1 y 2

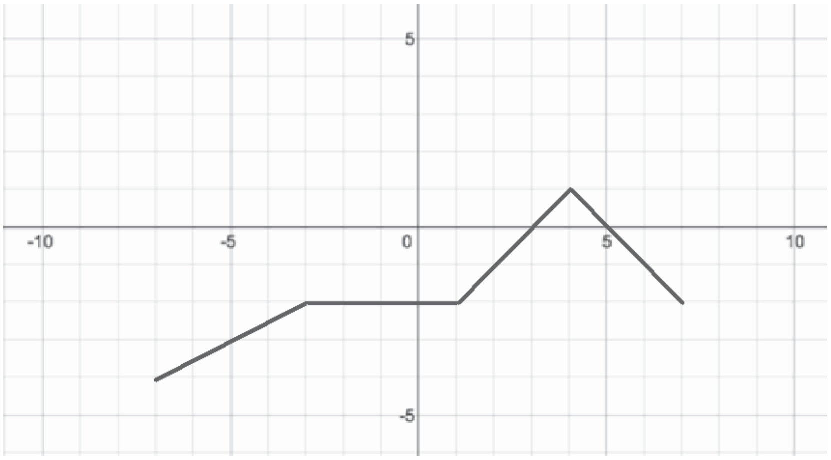
1. Describe cómo representar gráficamente la siguiente función a trozos. Luego, representa $y = f(x)$ en la siguiente gráfica.

$$f(x) = \begin{cases} -3x-3, & x \leq -2 \\ 0.5+4, & -2 < x < 2 \\ -2x+9, & x \geq 2 \end{cases}$$



EUREKA MATH

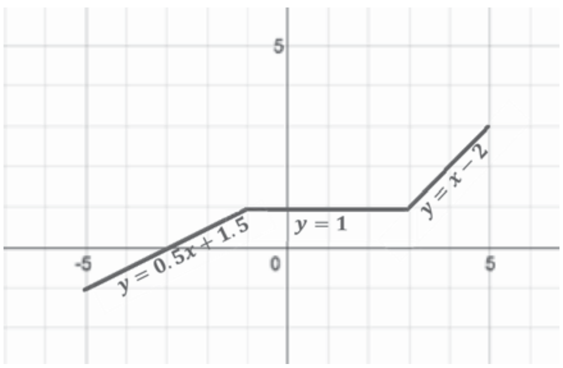
2. Utiliza la gráfica de f a continuación para escribir una fórmula para f como una función a trozos.



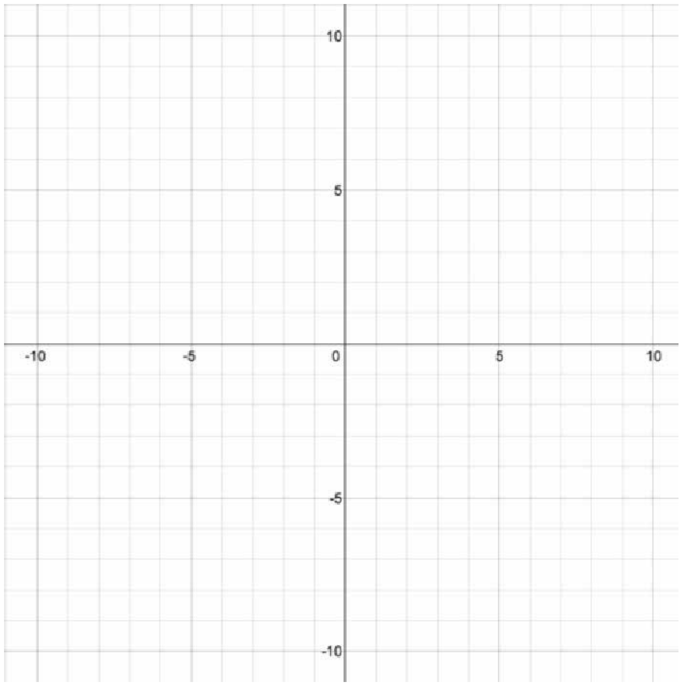
Desafío exploratorio 2

Se muestra la gráfica $y = f(x)$ de una función a trozos f. El dominio de f es $-5 \leq x \leq 5$ y el rango es $-1 \leq y \leq 3$.

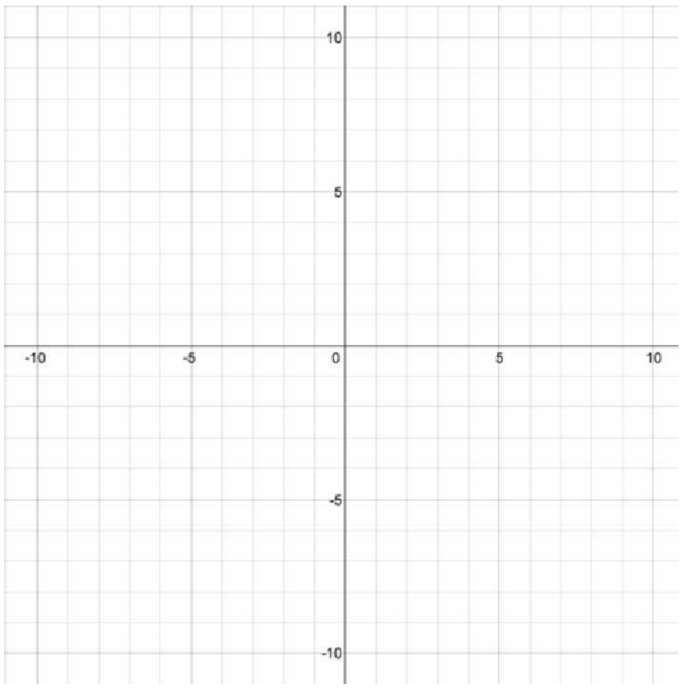
a. Marca e identifica cuatro puntos estratégicos que fueron útiles al dibujar la gráfica de $y = f(x)$.



b. Dibuja la gráfica de $y = 2f(x)$ e indica el dominio y el rango de la función transformada. ¿Cómo puedes utilizar la parte (a) como ayuda para dibujar la gráfica de $y = 2f(x)$?



c. Una escala horizontal con un factor de escala $\frac{1}{2}$ de la gráfica de $y = f(x)$ es la gráfica de $y = f(2x)$. Dibuja la gráfica de $y = f(2x)$, e indica el dominio y el rango. ¿Cómo puedes utilizar los puntos identificados en la parte (a) como ayuda para dibujar $y = f(2x)$?



Ejercicios 3 y 4

3. ¿Cómo se compara el rango de f del Desafío exploratorio 2 con el rango de una función transformada g, donde $g(x) = kf(x)$, cuando $k > 1$?

4. ¿Cómo se compara el dominio de f del Desafío exploratorio 2 con el dominio de una función transformada g, donde $g(x) = f\left(\frac{1}{k}x\right)$, cuando $0 < k < 1$? (Pista: ¿cómo se comprime una gráfica cuando se la ajusta a una escala horizontal por un factor k?).

Grupo de problemas

1. Supón que se proporciona la gráfica de f. Escribe una ecuación para cada una de las siguientes gráficas después de transformar la gráfica de f según se describe a continuación. Observa que las transformaciones no son acumulativas.

   a. Trasladar 5 unidades hacia arriba

   b. Trasladar 3 unidades hacia abajo

   c. Trasladar 2 unidades hacia la derecha

   d. Trasladar 4 unidades hacia la izquierda

   e. Reflejar al otro lado del eje x

   f. Reflejar al otro lado del eje y

   g. Estirar verticalmente por un factor de 2

   h. Comprimir verticalmente por un factor de $\frac{1}{3}$

   i. Comprimir horizontalmente por un factor de $\frac{1}{3}$

   j. Estirar horizontalmente por un factor de 2

2. Explica cómo se relacionan las gráficas de las siguientes ecuaciones con la gráfica de $y = f(x)$.

   a. $y = 5f(x)$

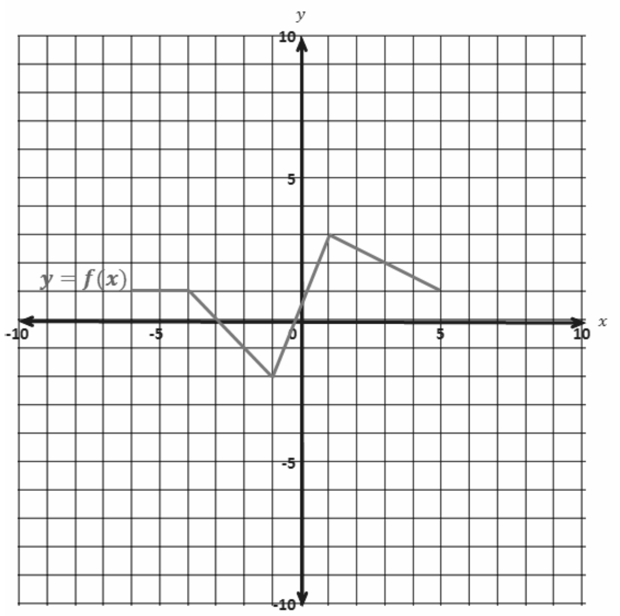
   b. $y = f(x - 4)$

   c. $y = -2f(x)$

   d. $y = f(3x)$

   e. $y = 2f(x) - 5$

3. A continuación se proporciona la gráfica de la ecuación $y = f(x)$. Por cada una de las siguientes transformaciones de la gráfica, escribe una fórmula (en términos de f) para la función representada por la transformación de la gráfica de $y = f(x)$. Luego, dibuja la gráfica transformada de la función en el mismo par de ejes que la gráfica de $y = f(x)$.



   a. Una traslación de 3 unidades hacia la izquierda y 2 unidades hacia arriba

   b. Un estiramiento vertical por un factor de escala de 3

   c. Una compresión horizontal por un factor de escala de $\frac{1}{2}$

4. Vuelve a examinar tu trabajo del Desafío exploratorio 2 y los Ejercicios 3 y 4 de esta lección. En las partes (b) y (c) del Desafío exploratorio 2 se preguntaba cómo podrían las ecuaciones $y = 2f(x)$ y $y = f(2x)$ representarse en una gráfica con el apoyo de los puntos estratégicos hallados en la parte (a). En este problema, investigaremos si es posible determinar las gráficas de $y = 2f(x)$ y $y = f(2x)$ trabajando directamente con la función lineal a trozos f.

   a. Escribe la función f del Desafío exploratorio 2 como una función lineal a trozos.

   b. Sea $g(x) = 2f(x)$. Utiliza la gráfica de $y = 2f(x)$ que dibujaste en la parte (b) del Desafío exploratorio 2 para escribir la fórmula para la función g como una función lineal a trozos.

   c. Sea $h(x) = f(2x)$. Utiliza la gráfica de $y = f(2x)$ que dibujaste en la parte (c) del Desafío exploratorio 2 para escribir la fórmula para la función h como una función lineal a trozos.

   d. Compara las funciones lineales a trozos g y h con la función lineal a trozos f. ¿Se modificaron las expresiones que definen cada trozo? De ser así, ¿cómo lo hicieron? ¿Se modificaron los dominios de cada trozo? De ser así, ¿cómo lo hicieron?

Esta página queda en blanco intencionalmente.

Lección 21: Comparar modelos lineales y exponenciales otra vez

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

	Modelo lineal	**Modelo exponencial**
Forma general		
Significado de los parámetros a y b		
Ejemplo		
Regla para hallar $f(x+1)$ a partir de $f(x)$		
Tabla		
Gráfica		
Ejemplo de problema razonado		

Ejercicios

1. Por cada tabla a continuación, supón que la función f se define para todos los números reales. Calcula $\triangle f = f(x+1) - f(x)$ en la última columna de las siguientes tablas, y muestra el proceso. (En este contexto, el símbolo $\triangle$ significa *cambio en*). ¿Qué observas sobre $\triangle f$? ¿La función podría ser lineal o exponencial? Escribe una fórmula de función lineal o exponencial que genere los mismos pares de entrada y salida que se dan en la tabla.

x	$f(x)$	$\triangle f = f(x+1) - f(x)$
1	-3	
2	1	
3	5	
4	9	
5	13	

x	$f(x)$	$\triangle f = f(x+1) - f(x)$
0	2	
1	6	
2	18	
3	54	
4	162	

2. Terence miró la segunda columna de la tabla y observó que $\frac{3}{1}=\frac{9}{3}=\frac{27}{9}=\frac{81}{27}$. Debido a esta observación, afirmó que los pares de entrada y salida de la tabla podrían representarse con una función exponencial. Explica por qué Terence está en lo correcto o no. Si está en lo correcto, escribe una fórmula para la función exponencial que genere los pares de entrada y salida dados en la tabla. Si no está en lo correcto, determina y escribe una fórmula para una función que genere los pares de entrada y salida dados en la tabla.

x	$T(x)$
0	1
1	3
4	9
13	27
40	81

3. Un río tiene una población inicial de piscardos de $40{,}000$ que crece un 5% cada año. Debido a las condiciones ambientales, la cantidad de algas con las que los piscardos se alimentan está disminuyendo y mantiene a $1{,}000$ piscardos menos cada año. Actualmente, hay suficientes algas para mantener a $50{,}000$ piscardos. ¿La población de piscardos está aumentando de forma lineal o exponencial? ¿La cantidad de algas está disminuyendo a una tasa lineal o exponencial? ¿En qué año la población de piscardos superará la cantidad de algas disponibles?

4. Con una calculadora, Joanna creó la siguiente tabla y realizó la siguiente conjetura: $3x$ siempre es mayor que $(1.02)^x$. ¿Está en lo correcto? Explica tu respuesta.

$\boldsymbol{x}$	$(\mathbf{1.02})^x$	$\mathbf{3x}$
1	1.02	3
2	1.0404	6
3	1.0612	9
4	1.0824	12
5	1.1041	15

Resumen de la lección

- Supón que los pares de entrada y salida de un conjunto de datos bivariados poseen la siguiente propiedad: por cada dos entradas que están separadas por una diferencia dada, la diferencia en sus salidas correspondientes es constante. Entonces, un modelo adecuado para el conjunto de datos podría ser una función lineal.
- Supón que los pares de entrada y salida de un conjunto de datos bivariados poseen la siguiente propiedad: por cada dos entradas que están separadas por una diferencia dada, el cociente de sus salidas correspondientes es constante. Entonces, un modelo adecuado para el conjunto de datos podría ser una función exponencial.
- Una función exponencial creciente eventualmente superará a cualquier función lineal. Es decir, si $f(x) = ab^x$ es una función exponencial con $a > 0$ y $b > 1$ y $g(x) = mx + k$ es cualquier función lineal, entonces existe un número real M tal que para toda $x > M$, entonces $f(x) > g(x)$. No siempre esto resulta evidente en una calculadora gráfica; esto se debe a que las gráficas no se muestran completamente en la pantalla como para que podamos ver la elevación brusca de la función exponencial comparada con la función lineal.

Grupo de problemas

Por cada tabla que aparece en los Problemas 1 a 6, clasifica los datos como descriptivos de una relación lineal, una relación de crecimiento exponencial, una relación de decaimiento exponencial o ninguno de estos conceptos. Si la relación es lineal, calcula la tasa constante de cambio (pendiente) y escribe una fórmula para la función lineal que represente los datos. Si la función es exponencial, calcula el cociente común para los valores de entrada que están separados por una distancia y escribe la fórmula para la función exponencial que represente los datos. Por cada función lineal o exponencial que hallaste, representa en una gráfica la ecuación $y = f(x)$.

1.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$
4	$\frac{1}{16}$
5	$\frac{1}{32}$

2.

x	$f(x)$
1	1.4
2	2.5
3	3.6
4	4.7
5	5.8

3.

x	$f(x)$
1	-1
2	0
3	2
4	5
5	9

4.

x	$f(x)$
1	20
2	40
3	80
4	160
5	320

5.

x	$f(x)$
1	-5
2	-12
3	-19
4	-26
5	-33

6.

x	$f(x)$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{5}$
5	$\frac{1}{6}$

7. Aquí se presenta una variación de un acertijo clásico: como negocio, Jayden se dedica a pasear perros. Tiene dos planes. El plan 1 incluye el paseo de un perro una vez al día por una tasa de $5 por día. El plan 2 también incluye un paseo por día, pero se cobra 1 centavo por 1 día, 2 centavos por 2 días, 4 centavos por 3 días y 8 centavos por 4 días y continúa duplicándose por cada día adicional. La señora Maroney necesita que Jayden pasee a su perro todos los días durante dos semanas. ¿Qué plan debería elegir? Muestra el proceso para justificar tu respuesta.

8. Tim deposita dinero en una cuenta de certificado de depósito. El saldo (en dólares) de su cuenta t años después de hacer el depósito está dado por $T(t) = 1000(1.06)^t$ para $t \geq 0$.

   a. Explica, en términos de la estructura de la expresión utilizada para definir $T(t)$, por qué el saldo de Tim nunca puede ser de $999.

   b. ¿A qué porcentaje crece el valor de $T(t)$ cada año? Explica tu respuesta mediante una fórmula recursiva para la secuencia $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$, etc.

   c. ¿A qué porcentajes crece el valor de $T(t)$ cada dos años? (Pista: utiliza tu fórmula recursiva para escribir $T(n + 2)$ en términos de $T(n)$).

9. Tu profesor de Matemáticas te pide que dibujes una gráfica de la función exponencial $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ para x, un número entre 0 y 40 inclusive, con una escala de 10 unidades de una pulgada para ambos ejes, x y y.

   a. ¿Cuáles son las dimensiones (en pies) del rollo de papel que necesitarás para dibujar esta gráfica?

   b. ¿Cuántos pies de papel más necesitarías agregar al rollo para representar en la gráfica la función en el intervalo $0 \leq x \leq 41$?

   c. Halla una m tal que la función lineal $g(x) = mx + 2$ sea mayor que $f(x)$ para todas las x tal que $0 \leq x \leq 40$, pero $f(41) > g(41)$.

Lección 22: Representar una población de especies invasoras

Trabajo en clase

Ejercicio de representación matemática

El pez león es un pez nativo del océano Pacífico occidental. Este pez comenzó a aparecer en el océano Atlántico occidental en 1985. Esto se debe, probablemente, a que las personas lo compraban como mascota y luego lo arrojaban a las vías fluviales que conducen al océano. Dado que no posee depredadores naturales en esta área, el número de peces león creció muy rápido y ahora existen grandes poblaciones en todo el Caribe, así como a lo largo de la costa este de los Estados Unidos y el golfo de México. Recientemente, se han visto peces león incluso en el norte, en Nueva York y Rhode Island.

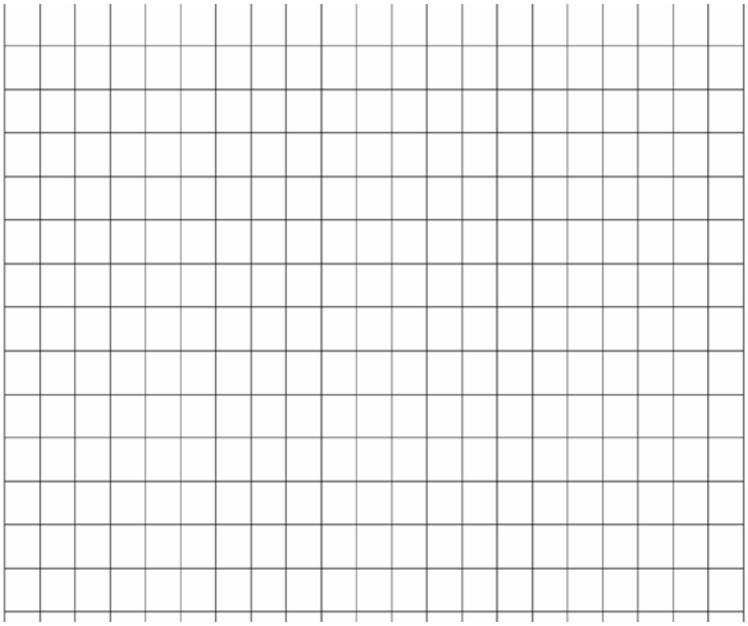
La siguiente tabla muestra el número de avistamientos nuevos que se reportan por año al programa de Especies Acuáticas No Nativas (NAS, por sus siglas en inglés), que es una rama del Departamento de Estudios Geológicos de los Estados Unidos.

Año	Número de avistamientos nuevos	Número total de avistamientos
1985	1	
1992	1	
1995	3	
1996	1	
2000	6	
2001	25	
2002	50	
2003	45	
2004	57	
2005	43	
2006	51	
2007	186	
2008	173	
2009	667	
2010	1,342	

1. Completa la tabla registrando el número total de avistamientos cada año.

2. Examina los datos del número total de avistamientos. ¿Qué modelo parece ajustarse mejor a los datos: lineal o exponencial? Explica tu razonamiento.

3. Realiza un diagrama de dispersión del año en función del número total de avistamientos.



4. Conforme al diagrama de dispersión, revisa tu respuesta del Ejercicio 2 o explica cómo el diagrama apoya tu respuesta de dicho ejercicio.

5. En el diagrama de dispersión, traza una curva suave que se ajuste a los datos.

6. A partir de tu tabla, calcula la razón de cambio promedio en el número total de avistamientos para cada uno de los siguientes intervalos de tiempo.

   a. 1995–2000
   b. 2000–2005
   c. 2005–2010

7. Ya sea que afirmes que el modelo que se ajusta mejor a los datos es lineal o exponencial, ¿cómo pueden las razones de cambio promedio servir de apoyo para tu argumento?

8. Utiliza la herramienta de regresión de una calculadora gráfica para hallar una ecuación que represente el número de avistamientos de peces león cada año.

9. Utiliza tu modelo para predecir el número total de avistamientos de peces león a finales de 2013.

10. El número real de avistamientos desde julio de 2013 fue de $3{,}776$. ¿Tu modelo parece haber producido una predicción acertada? Explica tu respuesta.

Grupo de problemas

Otro problema de especies invasoras: kudzu

Kudzu, una enredadera perenne nativa del sudeste de Asia, ahora cubre una gran área del sur de los Estados Unidos. Cuando el kudzu se introdujo en los Estados Unidos en la Exposición Universal de Filadelfia de 1876, se lo presentó como un cultivo forrajero y una planta ornamental. Entre muchos agricultores del sur, se promovió la plantación de kudzu como una manera de controlar la erosión de mediados de la década de 1930 hasta mediados de la década de 1950. En 1953, se eliminó al kudzu de la lista de los cultivos de cobertura permitidos por el Departamento de Agricultura de los Estados Unidos, debido a su reconocimiento como una especie invasora.

Busca información en Wikipedia sobre el kudzu en los Estados Unidos y escribe un informe corto (de 1 a 2 páginas) sobre el crecimiento de esta planta desde su introducción en el país. En tu informe, elige una función (lineal o exponencial) para representar, en una expresión y en una gráfica, el crecimiento anual de kudzu (en hectáreas) en los Estados Unidos durante los últimos cincuenta años más o menos. ¡Recuerda citar tus fuentes!

Lección 23: La ley de enfriamiento de Newton

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

Se llama a un detective a la escena de un crimen donde se ha encontrado un cadáver. Llega a la escena y mide la temperatura del cuerpo a las 9:30 p. m. Luego de investigar la escena, declara que la persona murió 10 horas antes, aproximadamente a las 11:30 a. m. Una investigadora de escenas del crimen llega un poco más tarde e indica que el detective está equivocado. Dice que la persona murió aproximadamente a las 6:00 a. m., 15.5 horas antes de que se midiera la temperatura del cuerpo. Sostiene que puede probarlo con la ley de enfriamiento de Newton,

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a) \cdot 2.718^{-kt},$$

donde:

$T(t)$ es la temperatura del objeto luego de que transcurra un tiempo de t horas,

T_a es la temperatura ambiente (la temperatura del entorno), que se asume que es constante y no se ve afectada por el proceso de enfriamiento,

T_0 es la temperatura inicial del objeto y

k es la constante de desintegración.

Utiliza los datos recopilados en la escena para decidir quién tiene razón: el detective o la investigadora de la escena del crimen.

$T_a = 68°\mathrm{F}$ (la temperatura de la habitación)

$T_0 = 98.6°\mathrm{F}$ (la temperatura inicial del cuerpo)

$k = 0.1335$ (13.35% por hora, calculado por la investigadora a partir de los datos reunidos)

La temperatura del cuerpo a las 9:30 p. m. es $72°\mathrm{F}$.

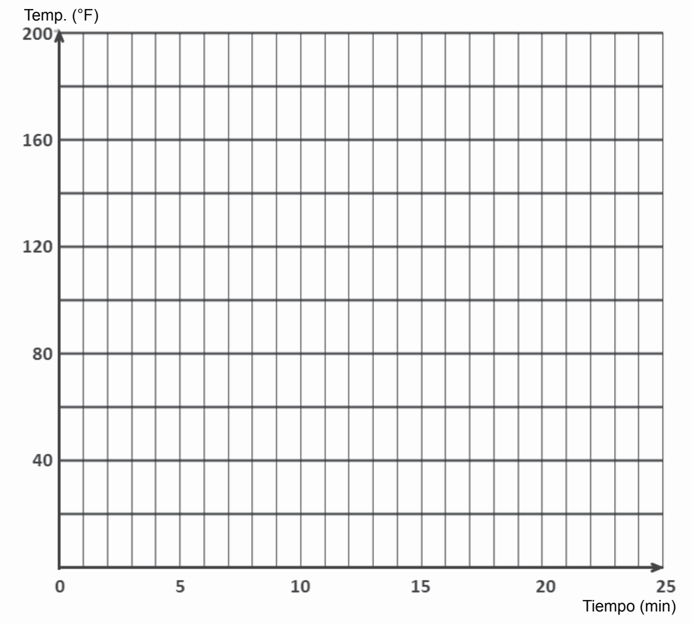
Ejercicio de representación matemática

Se sirven dos tazas de café de la misma cafetera. La temperatura inicial del café es $180°\text{F}$ y k es 0.2337 (para el tiempo en minutos).

1. Supón que ambas tazas se sirven al mismo tiempo. La Taza 1 se deja en la habitación, que tiene una temperatura de $75°\text{F}$, y la Taza 2 se lleva afuera, donde la temperatura es de $42°\text{F}$.

   a. Usa la ley de enfriamiento de Newton para escribir ecuaciones para la temperatura de cada taza luego de que transcurran t minutos.

   b. Representa gráficamente e identifica ambas ecuaciones en el mismo plano de coordenadas y compara y contrasta las dos gráficas.

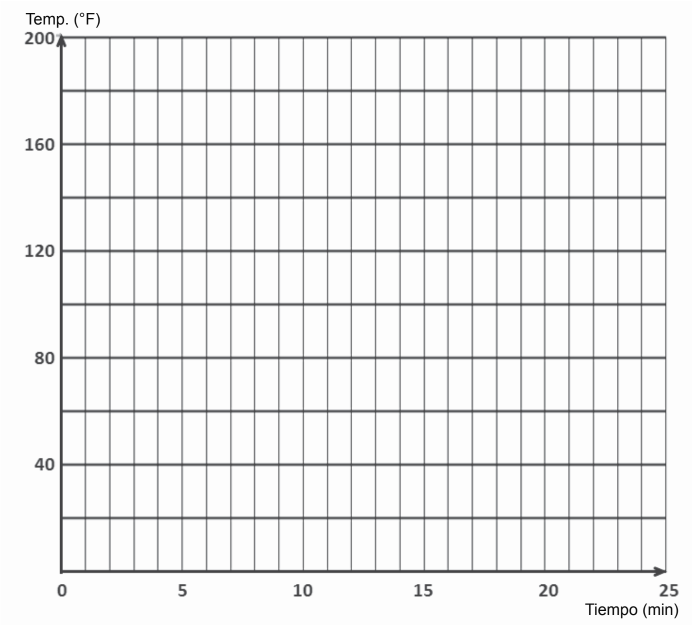


c. Es seguro beber el café cuando su temperatura es menor a $140°\text{F}$. Calcula aproximadamente cuánto tiempo transcurre antes de que el café alcance una temperatura que sea segura para beberlo.

2. Supón que ambas tazas se sirven al mismo tiempo y se dejan en la habitación cuya temperatura es $75°\text{F}$. Pero esta vez, se le agrega leche de inmediato a la Taza 2, lo que lo enfría a una temperatura inicial de $162°\text{F}$.

   a. Usa la ley de enfriamiento de Newton para escribir ecuaciones para la temperatura de cada taza luego de que transcurran t minutos.

   b. Representa gráficamente e identifica ambas ecuaciones en el mismo plano de coordenadas y compara y contrasta las dos gráficas.

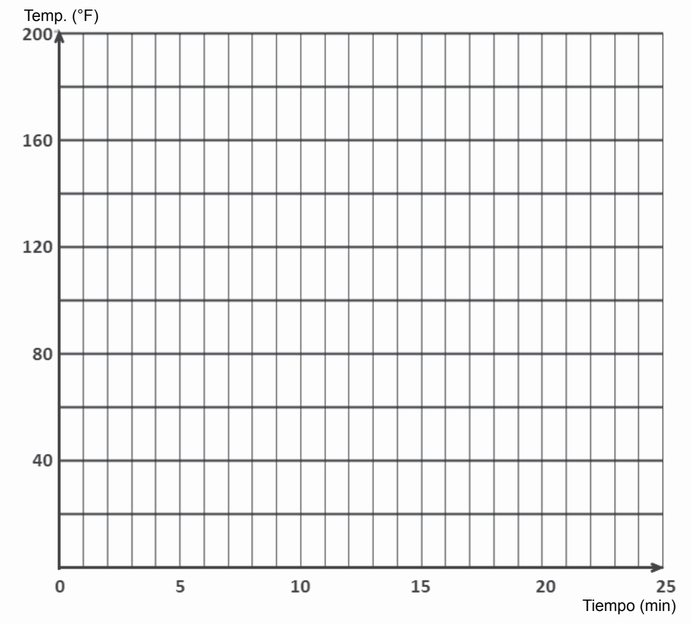


c. Es seguro beber el café cuando su temperatura es menor a $140°\text{F}$. ¿Cuánto tiempo transcurre antes de que el café alcance una temperatura que sea segura para beberlo?

3. Supón que la Taza 2 se sirve 5 minutos después que la Taza 1 (la cafetera se mantiene a $180°\text{F}$ durante los 5 minutos). Se dejan ambas tazas en la habitación, cuya temperatura es de $75°\text{F}$.

   a. Usa la ecuación de la Taza 1 hallada en la parte (a) del Ejercicio 1 para escribir una ecuación para la Taza 2.

   b. Representa gráficamente e identifica ambas ecuaciones en el mismo plano de coordenadas y describe cómo obtener la gráfica de la Taza 2 a partir de la gráfica de la Taza 1.



Grupo de problemas

Utiliza la demostración del Enfriamiento del café en Wolfram Alpha para escribir un informe breve sobre las siguientes preguntas.
http://demonstrations.wolfram.com/TheCoffeeCoolingProblem/

(Ten en cuenta que es necesario descargar el reproductor CDF gratuito de Wolfram con anticipación para poder ejecutar la demostración).

1. Si deseas que el café se pueda beber lo más rápido posible, ¿debes agregar crema inmediatamente después de servir el café o debes esperar? Utiliza los resultados de la demostración para apoyar tu afirmación.

2. Si deseas que el café se mantenga tibio durante más tiempo, ¿debes agregar crema inmediatamente después de servir el café o debes esperar? Utiliza los resultados de la demostración para apoyar tu afirmación.

Esta página queda en blanco intencionalmente.

Lección 24: Funciones a trozos y escalonadas en contexto

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

Las siguientes son dos opciones diferentes de estacionamiento en la ciudad.

Estacionamiento 1-2-3	**Estacionamiento Blue Line**
$\$6$ la primera hora (o parte de una hora) $\$5$ la segunda hora (o parte de una hora) $\$4$ cada hora (o parte de una hora) a partir de la tercera hora	$\$5$ por hora hasta 5 horas $\$4$ por hora en adelante

El costo de una estadía de 2.75 horas en el Estacionamiento 1-2-3 es $\$6 + \$5 + \$4 = \$15$. El costo de una estadía de 2.75 horas en el Estacionamiento Blue Line es $\$5(2.75) = \$13.75$.

¿Qué estacionamiento es más barato para una estadía de 5.25 horas? Muestra el proceso para apoyar tu respuesta.

Ejercicio de representación matemática

Helena trabaja como pasante de verano en el Aeropuerto Internacional de Albany. Está analizando las tarifas y las distintas opciones de estacionamiento. Su departamento necesita aumentar 10% los ingresos del estacionamiento para cubrir los aumentos de los costos operativos. A continuación se muestran las tarifas de estacionamiento de 2008. Tu clase escribirá funciones lineales a trozos para representar cada tipo de tarifa y luego utilizará esas funciones para desarrollar un plan para aumentar los ingresos del estacionamiento.

Tarifas de estacionamiento (vigentes desde el 28 de octubre de 2008)

Tarifas de corto plazo

Ubicado en el primer piso del estacionamiento y en frente de la terminal

Primera media hora:	GRATIS
Segunda media hora:	\$2.00
Cada media hora adicional:	\$1.00
Tarifa diaria máxima:	\$24.00

Tarifas del garage de estacionamiento

Ubicado en el segundo, tercer, cuarto y quinto piso del garage de estacionamiento

Primera hora:	\$2.00
Cada hora adicional:	\$2.00
Tarifa diaria máxima:	\$12.00
Cinco días consecutivos:	\$50.00
Siete días consecutivos:	\$64.00

Tarifas de estacionamiento de largo plazo

Ubicado detrás del garage de estacionamiento

Primera hora:	\$2.00
Cada hora adicional:	\$1.00
Tarifa diaria máxima:	\$9.00
Cinco días:	\$36.00
Siete días:	\$45.00

Estacionamiento económico Lote E remoto – Transporte de conexión con la terminal

Primera hora:	\$1.00
Tarifa por hora:	\$1.00
Tarifa diaria máxima:	\$5.00

1. Utiliza funciones escalonadas para escribir una función lineal a trozos que represente la tarifa de estacionamiento asignada a tu grupo. Al igual que en el Ejercicio inicial, supón que si el carro está estacionado durante cualquier porción del siguiente periodo de tiempo, ese periodo se cuenta por completo (es decir, 3.75 horas se cuentan como 4 horas, 3.5 días se cuentan como 4 días, etc.).

Helena reunió todos los boletos de estacionamiento de un día durante el verano como ayuda para analizar distintas maneras de aumentar los ingresos del estacionamiento y utilizó los datos para armar la siguiente tabla. La tabla muestra el número de boletos emitidos para cada periodo y la categoría de costo de los cuatro estacionamientos.

Boletos de estacionamiento reunidos durante un día de verano en el Aeropuerto Internacional de Albany

Corto plazo		
Tiempo en el boleto (horas)	Costo de estaciona-miento ($)	Cantidad de boletos
0.5	0	400
1	2	600
1.5	3	80
2	4	64
2.5	5	8
3	6	24
3.5	7	4
4	8	
4.5	9	
5	10	
5.5	11	
6	12	
6.5	13	
7	14	
7.5	15	
8	16	4
8.5	17	
9	18	8
9.5	19	
10	20	
10.5	21	
11	22	
11.5	23	
12 a 24	24	8

Largo plazo		
Tiempo en el boleto (horas)	Costo de estaciona-miento ($)	Cantidad de boletos
1	2	8
2	3	20
3	4	24
4	5	
5	6	
6	7	
7	8	60
8	9	92
8 a 24	9	260
2 días	18	164
3 días	27	12
4 días	36	8
5 días	36	20
6 días	36	36
7 días	45	32

Garaje de estacionamiento		
Tiempo en el boleto (horas)	Costo de estaciona-miento ($)	Cantidad de boletos
1	2	8
2	4	12
3	6	8
4	8	4
5	10	0
6	12	16
6 a 24	12	156
2 días	24	96
3 días	36	40
4 días	48	12
5 a 6 días	50	8
7 días	64	4

Estacionamiento económico remoto		
Tiempo en el boleto (horas)	Costo de estaciona-miento ($)	Cantidad de boletos
1	1	
2	2	
3	3	
4	4	
5	5	
5 a 24 h	5	84
2 días	10	112
3 días	15	64
4 días	20	60
5 días	25	72
6 días	30	24
7 días	35	76
8 días	40	28
9 días	45	8
10 días	50	4
14 días	70	8
18 días	90	4
21 días	105	4

Por ejemplo, hubo 600 tickets de estacionamiento de corto plazo de 1 hora, que se cobraron a $2 cada uno. Las ganancias totales para ese tipo de boleto serían $1200.

2. Calcula los ingresos totales generados por la tarifa que te fue asignada utilizando los datos de los boletos de estacionamiento dados.

3. El Aeropuerto Internacional de Albany quiere aumentar 10% los ingresos promedio de estacionamiento diario. Haz una recomendación a la administración de una o más tarifas de estacionamiento que habría que cambiar para aumentar 10% los ingresos de estacionamiento diario. Luego, utiliza los datos que reunió Helena para mostrar que los ingresos aumentarían 10% si se implementara el cambio recomendado.

Grupo de problemas

1. Recuerda el problema de estacionamiento del Ejercicio inicial.

   a. Escribe una función lineal a trozos P utilizando funciones escalonadas que representen el costo del estacionamiento en el Estacionamiento 1-2-3 para x horas.

   b. Escribe una función lineal a trozos B que represente el costo del estacionamiento en el Estacionamiento Blue Line para x horas.

   c. Evalúa cada función para 2.75 y 5.25 horas. ¿Tus respuestas coinciden con el trabajo del Ejercicio inicial? De no ser así, ajusta tu modelo.

   d. ¿Hay algún momento en el que el costo de estacionamiento de ambos modelos sea el mismo? Apoya tu razonamiento con gráficas o ecuaciones.

   e. Aplica tus conocimientos sobre las transformaciones para escribir una nueva función que representaría los resultados de un aumento general de $2 de las tarifas por hora del Estacionamiento 1-2-3. (Pista: dibuja la gráfica primero y luego utilízala como ayuda para determinar las funciones escalonadas y los dominios).

2. No había nieve en el suelo cuando comenzó a nevar a medianoche a una tasa constante de 1.5 pulgadas por hora. A las 4:00 a. m., comenzó a nevar a una tasa constante de 3 pulgadas por hora y, luego, de 7:00 a. m. a 9:00 a. m., nevaba a una tasa constante de 2 pulgadas por hora. Dejó de nevar a las 9:00 a. m. (Nota: este problema representa la caída de nieve a una tasa constante durante cada periodo de tiempo. En realidad, las tasas de caída de nieve podrían ser casi constantes, pero es improbable que sean perfectamente uniformes a lo largo de un periodo de tiempo dado).

   a. Escribe una función lineal a trozos que represente la profundidad de la nieve como una función de tiempo desde la medianoche.

   b. Crea una gráfica de la función.

   c. ¿En qué momento la profundidad de la nieve sobre el suelo era de 8 pulgadas?

   d. ¿Cuál era la profundidad de la nieve a las 9:00 a. m.?

3. Si un empleador te pagó $\$113,700$ en 2013, tu tasa impositiva de seguridad social representó un 6.2% de tus ganancias. Si ganaste más de $\$113,700$, pagaste un monto fijo de $\$7,049.40$.

   a. Escribe una función lineal a trozos que represente los impuestos de seguridad social de 2013 para las ganancias entre $\$0$ y $\$500,000$.

   b. ¿Cuánto debería pagar de impuestos de seguridad social alguien que ganó $\$50,000$?

   c. ¿Cuánto dinero habrías ganado si hubieras pagado $\$4,000$ de impuestos de seguridad social en 2013?

   d. ¿Cuál es el significado de $f\ (150,000)$? ¿Cuál es el valor de $f\ (150,000)$?

4. La función f proporciona el costo de enviar x lb por FedEx pagando la tarifa estándar de envío a la mañana siguiente para la Zona 2 en 2013.

$$f(x) = \begin{cases} 21.50 & 0 < x \leq 1 \\ 23.00 & 1 < x \leq 2 \\ 24.70 & 2 < x \leq 3 \\ 26.60 & 3 < x \leq 4 \\ 27.05 & 4 < x \leq 5 \\ 28.60 & 5 < x \leq 6 \\ 29.50 & 6 < x \leq 7 \\ 31.00 & 7 < x \leq 8 \\ 32.25 & 8 < x \leq 9 \end{cases}$$

a. ¿Cuánto costaría enviar un paquete de 3 lb?

b. ¿Cuánto costaría enviar un paquete de 7.25 lb?

c. ¿Cuál es el dominio y el rango de f?

d. ¿Podrías usar la función techo para escribir esta función de forma más concisa? Explica tu razonamiento.

5. Utiliza la función piso o techo y tus conocimientos sobre las transformaciones para escribir una función lineal a trozos f cuya gráfica se muestra a continuación.